

УДК 62-52

О СУБОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ

© О.В. Ведищева, С.В. Диденко, Т.Б. Заусонина, С.М. Лобанов

Vedisheva O.V., Didenko S.V., Zausonina T.B., Lobanov S.M. On sub-optimal non-linear system control according to the quadric criterion. The article looks at the problem of controlling one class of non-linear systems on the basis of the quadric criterion, which cannot be reduced to the problem of the state regulator. To estimate the optimal control, a special method is used in this problem of sequential approximations that converges at each quite small interval of time. This allows achieving the desired estimation out of solving a certain two-point edge problem.

Ведение. Рассмотрим нелинейную динамическую систему, характеризуемую уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u), \quad (0.1)$$

в котором $x = (x^1, \dots, x^n)$ — n -мерный действительный вектор состояния, $u = (u^1, \dots, u^m)$ — m -мерный действительный вектор управления, A и B — действительные $(n \times n)$ - и $(n \times m)$ -матрицы, а $f = (f^1, \dots, f^n)$ — векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

в пространстве \mathbb{R}^{n+m} .

Предположим, что начальное состояние

$$x(t_0) = c \quad (0.2)$$

задано, а задача управления системой (0.1) заключается в минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle e(t), Qe(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] dt + \langle e(T), Pe(T) \rangle, \quad (0.3)$$

в котором T — фиксированное конечное время, Q и P — положительно полуопределенные $(n \times n)$ -матрицы, R — положительно определенная $(m \times m)$ -матрица и $e(t)$ — ошибка системы, т.е.

$$e(t) = x(t) - z(t)$$

для всех значений $t_0 \leq t \leq T$, где $z = (z^1, \dots, z^n)$ — n -мерный действительный вектор, характеризующий заданный режим функционирования системы (0.1).

Во многих практических ситуациях режим $z(t)$ устроен достаточно плохо и задача (0.1)–(0.3) не может быть сведена к задаче о регуляторе состояния (см., например, [1, с. 657]). При этом, если влиянием функции f на систему (0.1) по каким-либо причинам можно пренебречь, то сформулированная выше задача достаточно проста и ее, видимо, можно считать полностью решенной (см., например, [1, 2]). Кроме того, весьма важным представляется то обстоятельство, что здесь решение удастся получить в виде закона управления с обратной связью. В общем случае для получения оценок решения (или собственно решения) задачи (0.1)–(0.3) в виде закона управления используют различные методы, которые в той или иной форме используют линеаризацию и, возможно, последовательные приближения (см., например, [2–4]).

Основной целью настоящей работы является разработка метода, приводящего к конструктивной процедуре получения оценки решения задачи (0.1)–(0.3) в виде закона управления с обратной связью. Данный метод позволяет в некоторых случаях получить искомую оценку из решения двухточечной краевой задачи.

1. Метод последовательных приближений. Следуя [3], рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle e(t), Qe(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] dt + \langle e(T), Pe(T) \rangle \quad (1.1)$$

с ограничением

$$\dot{x} = g(x, u), \quad x(t_0) = c, \quad (1.2)$$

где $g = (g^1, \dots, g^n)$ — нелинейная векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

и

$$\frac{\partial g^i}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

в пространстве \mathbb{R}^{n+m} .

Пусть $u_N(t), x_N(t)$ — некоторое N -е приближение к оптимальному управлению и состоянию в задаче (1.1), (1.2). Тогда $(N + 1)$ -е приближение $u_{N+1}(t), x_{N+1}(t)$ может быть получено как решение задачи о минимизации функционала

$$I_{N+1}(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle e(t), Qe(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle] dt + \langle e(T), Pe(T) \rangle \quad (1.3)$$

с ограничением

$$\dot{x} = g(x_N, u_N) + A_N(t)(x - x_N) + B_N(t)(u - u_N), \quad x(t_0) = c, \quad (1.4)$$

в котором $A_N(t)$ и $B_N(t)$ — действительные $(n \times n)$ - и $(n \times m)$ -матрицы, задаваемые равенствами

$$A_N(t) = \left(\frac{\partial g^i}{\partial x^j} \right) \Bigg|_{\substack{x=x_N(t) \\ u=u_N(t)}} \quad (1.5)$$

и

$$B_N(t) = \left(\frac{\partial g^i}{\partial u^j} \right) \Bigg|_{\substack{x=x_N(t) \\ u=u_N(t)}} \quad (1.6)$$

соответственно.

Задача (1.3), (1.4) представляет собой вариант задачи слежения для линейной системы и ее решение, как известно, дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) = R^{-1}B'_N(t)[h_{N+1}(t) - K_{N+1}(t)x_{N+1}(t)], \quad (1.7)$$

в котором $K_{N+1}(t)$ — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}_{N+1}(t) = -K_{N+1}(t)A_N(t) - A'_N(t)K_{N+1}(t) + \quad (1.8)$$

$$+ K_{N+1}(t)B_N(t)R - B_N(t)K_{N+1}(t) - Q$$

с граничным условием

$$K_{N+1}(T) = P, \quad (1.9)$$

а $h_{N+1}(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) = -[A_N(t) - B_N(t)R^{-1}B'_N(t)K_{N+1}(t)]'h_{N+1}(t) - Qz(t) + K_{N+1}(t)[g(x_N(t), u_N(t)) - A_N(t)x_N(t) - B_N(t)u_N(t)] \quad (1.10)$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = Qz(T) \quad (1.11)$$

(см., например, [1, с. 699]).

Если построенные выше последовательности

$$x_1, x_2, \dots, x_N, \dots \quad (1.12)$$

и

$$u_1, u_2, \dots, u_N, \dots \quad (1.13)$$

равностепенно непрерывны и равномерно ограничены на отрезке $[t_0, T]$, то из (1.12) и (1.13) можно выбрать подпоследовательности

$$x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_k}, \dots \quad (1.14)$$

и

$$u_{N_1}, u_{N_2}, \dots, u_{N_k}, \dots \quad (1.15)$$

равномерно на $[t_0, T]$ сходящиеся к некоторым непрерывным функциям x^* и u^* соответственно, где

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \infty.$$

Тогда, если окажется, что последовательность (1.14) совпадает с последовательностью (1.12), а последовательность (1.15) — с последовательностью (1.13), то, используя соотношения (1.5)–(1.11), можно рассмотреть и вопрос о том, будет ли $u^*(t)$ оптимальным управлением в задаче (1.1), (1.2).

Заметим теперь, что показать эквивалентность последовательностей (1.12), (1.14) и (1.13), (1.15) в общем случае совсем непросто. Однако, для задачи (0.1)–(0.3) несложно построить метод последовательных приближений, идейно близкий к упомянутому выше, но не имеющий формальных проблем со сходимостью, если время T достаточно мало.

Именно, для всех значений $N = 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J_{N+1}(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle e(t), Qe(t) \rangle +$$

$$\left\langle u(t), Ru(t) \right\rangle dt \left\langle c(T), Pc(T) \right\rangle \quad (1.16)$$

с ограничением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x_N, u_N), \quad x(t_0) = c. \quad (1.17)$$

Для заданных функций x_N и u_N оптимальное управление $u_{N+1}(t)$ в задаче (1.16), (1.17) дается законом управления с обратной связью

$$\begin{aligned} u_{N+1}(t) &= \\ &= R^{-1}B'[h_{N+1}(t) - K(t)x_{N+1}(t)], \end{aligned} \quad (1.18)$$

в котором $x_{N+1}(t)$ — решение уравнения (1.17), соответствующее $u_{N+1}(t)$ и удовлетворяющее начальному условию

$$x_{N+1}(t_0) = c,$$

$K(t)$ — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= \\ &= -K(t)A - A'K(t) + K(t)BR^{-1}B'K(t) - Q \end{aligned} \quad (1.19)$$

с граничным условием

$$K(T) = P, \quad (1.20)$$

а $h_{N+1}(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{h}_{N+1}(t) &= -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h_{N+1}(t) - \\ &- Qz(t) + K(t)f(x_N(t), u_N(t)) \end{aligned} \quad (1.21)$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = Qz(T). \quad (1.22)$$

Таким образом, если начальное приближение $x_0(t), u_0(t)$ задано, то соотношения (1.18)–(1.22) определяют схему последовательных приближений, которая, как будет показано ниже, при всех достаточно малых значениях T позволяет получить достаточно хорошее приближение к решению задачи (0.1)–(0.3). Именно эта схема и будет рассматриваться в дальнейшем. Отметим также, что для простоты начальное приближение здесь будет определено соотношениями

$$x_0(t) \equiv c \quad (1.23)$$

и

$$u_0(t) \equiv R^{-1}B'[Qz(T) - K(t)c]. \quad (1.24)$$

2. Основная теорема. Пусть L_2 — множество функций, определенных на отрезке $[t_0, T]$,

принимаящих значения в пространстве \mathbb{R}^m и

суммируемых с квадратом по Лебегу на $[t_0, T]$. Далее, пусть L_2^T — часть множества L_2 , такая, что для каждой функции $u \in L_2^T$ уравнение (0.1) имеет абсолютно непрерывное решение $x(t)$, определенное для всех значений $t_0 \leq t \leq T$ и удовлетворяющее начальному условию (0.2). В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема. Пусть функция $f = (f^1, \dots, f^n)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial u^j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

в пространстве \mathbb{R}^{n+m} . Тогда для каждой точки (t_0, c) пространства \mathbb{R}^{1+n} найдется такое действительное число $T_0 > t_0$, что для всех значений $t_0 < T < T_0$ справедливы равенства

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N(t) = u^*(t) \quad (2.1)$$

и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t) = x^*(t), \quad (2.2)$$

где сходимость равномерна на отрезке $[t_0, T]$, $u^*(t)$ — некоторая функция, определенная и непрерывная на $[t_0, T]$, а $x^*(t)$ — соответствующее решение уравнения (0.1) с начальным условием

$$x^*(t_0) = c. \quad (2.3)$$

При этом оказывается, что для всех значений $t_0 \leq t \leq T$

$$u^*(t) = R^{-1}B'[h^*(t) - K(t)x^*(t)], \quad (2.4)$$

где $h^*(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{h}^*(t) &= -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h^*(t) - Qz(t) + \\ &+ K(t)f(x^*(t), u^*(t)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

с граничным условием

$$h^*(T) = Qz(T). \quad (2.6)$$

Более того, для каждой функции $u \in L_2^T$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(u_N) = J(u^*) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} J_N(u). \quad (2.7)$$

Доказательство. Пусть $X(t)$ и $H(t)$ — решения линейных матричных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = [A - BR^{-1}B'K(t)]X, \quad X(t_0) = E$$

и, соответственно,

$$\dot{H} = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'H, \quad H(T) = E,$$

где E — единичная $(n \times n)$ -матрица. Тогда при использовании управления (1.18) уравнение (1.17) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} x_{N+1}(t) &= \\ &= X(t)c + \int_{t_0}^t X(t-\tau)[BR^{-1}B'h_{N+1}(\tau) + \\ &\quad + f(x_N(\tau), u_N(\tau))] d\tau, \end{aligned} \quad (2.8)$$

а уравнение (1.21) с граничным условием (1.22) — уравнению

$$h_{N+1}(t) = H(t)Qz(T) + \quad (2.9)$$

$$+ \int_T^t H(t-\tau)(K(\tau)f(x_N(\tau), u_N(\tau)) - Qz(\tau)) d\tau.$$

Принимая во внимание (2.9), перепишем уравнение (2.8) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} x_{N+1}(t) &= \\ &= X(t)c + \int_{t_0}^t X(t-\tau)\{f(x_N(\tau), u_N(\tau)) + \\ &\quad + BR^{-1}B'[H(\tau)Qz(T) + \\ &\quad + \int_T^\tau H(\tau-s)(K(s)f(x_N(s), u_N(s)) - Qz(s)) ds]\} d\tau. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (1.18) система (2.8), (2.9) может быть представлена в символической форме

$$\begin{aligned} x_{N+1}(t) &= X(t)c + \int_{t_0}^t [f_1(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau)) + \\ &\quad + \int_\tau^T f_2(\tau, s, x_N(s), h_N(s)) ds] d\tau, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$h_{N+1}(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau)) d\tau, \quad (2.11)$$

где

$$h_0 = Qz(T),$$

а $f_1 = (f_1^1, \dots, f_1^n)$, $f_2 = (f_2^1, \dots, f_2^n)$ и $f_3 = (f_3^1, \dots, f_3^n)$ — соответствующие векторные

функции, определенные и непрерывные вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f_l^i}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial f_l^i}{\partial h^j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad l = 1, 2, 3$$

в пространстве $[t_0, T] \times [t_0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$.

Пусть теперь a — некоторое положительное число. Обозначим через Σ — множество точек $(t, x, h) \in \mathbb{R}^{1+2n}$, для которых выполнены неравенства

$$t_0 \leq t \leq T, \quad |x - c| \leq a, \quad |h - h_0| \leq a, \quad (2.12)$$

где $|x|$ — евклидова длина вектора x . Так как Σ — компактное множество, то найдутся такие положительные числа M и L , что для всех значений t, x и h , удовлетворяющих условиям (2.12), при $t_0 \leq \tau \leq T$ выполнены неравенства

$$|f_l(t, \tau, x, h)| \leq M, \quad l = 1, 2, 3 \quad (2.13)$$

и

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_l^i(t, \tau, x, h)}{\partial x^j} \right| \leq L, \quad \left| \frac{\partial f_l^i(t, \tau, x, h)}{\partial h^j} \right| \leq L, \\ i, j = 1, \dots, n, \quad l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Обозначим через Ω множество всех непрерывных пар (x, h) функций, определенных на отрезке $[t_0, T]$, принимающих значения в пространстве \mathbb{R}^n и при $t_0 \leq t \leq T$ удовлетворяющих условиям

$$|x(t) - c| \leq a, \quad |h(t) - h_0| \leq a, \quad (2.15)$$

т.е. Ω — множество непрерывных пар (x, h) функций, графики которых лежат в Σ . При этом будем рассматривать часть Ω_T множества Ω , такую, что наряду с неравенствами (2.15) при $(x, h) \in \Omega_T$ выполнялись бы также неравенства

$$|X(t)c - c| \leq \frac{a}{2}, \quad |H(t)h_0 - h_0| \leq \frac{a}{2} \quad (2.16)$$

и

$$\begin{aligned} |x(t) - X(t)c| \leq \frac{a}{2}, \\ |h(t) - H(t)h_0| \leq \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Тогда в силу неравенств

$$|x(t) - c| \leq |x(t) - X(t)c| + |X(t)c - c|$$

и

$$|h(t) - h_0| \leq |h(t) - H(t)h_0| + |H(t)h_0 - h_0|$$

из условий (2.16) и (2.17) следуют неравенства (2.15) и, таким образом, принадлежность пары (x, h) к множеству Ω .

Для всех значений $t_0 \leq t \leq T$ положим

$$\varphi(t) = (x(t), h(t))$$

и будем говорить, что $\varphi \in \Omega_T$, если $(x, h) \in \Omega_T$. Обозначим через F оператор, задаваемый правыми частями системы (2.10), (2.11). Тогда, как легко видеть, если число T достаточно мало, то из принадлежности φ к Ω_T следует принадлежность к Ω_T и функции

$$\varphi^* = F\varphi, \tag{2.18}$$

где $\varphi^* = (x^*, h^*)$.

В самом деле, для того чтобы функция φ^* , задаваемая соотношением (2.18), принадлежала к множеству Ω_T , достаточно, чтобы при выполнении условия (2.16) для всех значений $t_0 \leq t \leq T$ были выполнены также и неравенства

$$|x^*(t) - X(t)c| \leq \frac{a}{2}, \quad |h^*(t) - H(t)h_0| \leq \frac{a}{2}.$$

Но в силу (2.10), (2.11) и (2.13) имеем

$$\begin{aligned} |h^*(t) - H(t)h_0| &= \\ &= \left| \int_t^T f_3(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) d\tau \right| \leq M(T - t_0) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |x^*(t) - X(t)c| &= \\ &= \left| \int_{t_0}^t [f_1(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) + \right. \\ &\left. + \int_{\tau}^T f_2(\tau, s, x(s), h(s)) ds] d\tau \right| \leq \\ &\leq M((T - t_0) + 1)(T - t_0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при

$$M((T - t_0) + 1)(T - t_0) \leq \frac{a}{2} \tag{2.19}$$

условие, предъявляемое к оператору F в (2.18), выполнено.

Пусть теперь $\varphi = (x, h)$ и $\psi = (y, g)$ — некоторые две функции, принадлежащие к множеству Ω_T . Тогда при выполнении неравенства (2.19) функции

$$\varphi^* = F\varphi$$

и

$$\psi^* = F\psi$$

также принадлежат к Ω_T , где $\varphi^* = (x^*, h^*)$ и $\psi^* = (y^*, g^*)$. При этом оказывается, что

$$\|\varphi^* - \psi^*\| = \|F\varphi - F\psi\| \leq k\|\varphi - \psi\|, \tag{2.20}$$

где

$$\|\varphi\| = \max_{t_0 \leq t \leq T} |\varphi(t)|$$

и k — некоторое положительное число, не зависящее от φ и ψ и при всех достаточно малых значениях $T > t_0$ удовлетворяющее условию

$$k < 1. \tag{2.21}$$

В самом деле, в силу неравенств (2.14) и формулы Лангража для всех значений $t_0 \leq t \leq T$ и $t_0 \leq \tau \leq T$

$$\begin{aligned} |f_l(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) - f_l(t, \tau, y(\tau), g(\tau))| &\leq \\ &\leq n^2 L(|x(\tau) - y(\tau)| + |h(\tau) - g(\tau)|), \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$l = 1, 2, 3$$

(см., например, [5, с. 163]). Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_t^T [f_3(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) - f_3(t, \tau, y(\tau), g(\tau))] d\tau \right| &\leq \\ &\leq n^2 L \left[\int_t^T |x(\tau) - y(\tau)| d\tau + \int_t^T |h(\tau) - g(\tau)| d\tau \right]. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Но

$$\int_t^T |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \leq \int_t^T |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \tag{2.24}$$

и

$$\int_t^T |h(\tau) - g(\tau)| d\tau \leq \int_t^T |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau. \tag{2.25}$$

Тогда, если

$$h^*(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) d\tau$$

и

$$g^*(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3(t, \tau, y(\tau), g(\tau)) d\tau,$$

то из неравенств (2.23)—(2.25) следует, что

$$\|h^* - g^*\| \leq 2n^2L(T - t_0)\|\varphi - \psi\|. \quad (2.26)$$

С другой стороны, в силу неравенства (2.22)

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^t \{f_1(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) - \right. \\ & \quad \left. - f_1(t, \tau, y(\tau), g(\tau)) + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\tau}^T [f_2(\tau, s, x(s), h(s)) - \right. \\ & \quad \left. - f_2(\tau, s, y(s), g(s))] ds \} d\tau \right| \leq \\ & \leq n^2L \int_{t_0}^t [|x(\tau) - y(\tau)| + |h(\tau) - g(\tau)| + \\ & \quad + \int_{\tau}^T (|x(s) - y(s)| + |h(s) - g(s)|) ds] d\tau. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Что

$$\int_{t_0}^t |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \leq \int_{t_0}^t |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \quad (2.28)$$

и

$$\int_{t_0}^t |h(\tau) - g(\tau)| d\tau \leq \int_{t_0}^t |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau. \quad (2.29)$$

Тогда, если

$$\begin{aligned} x^*(t) = & X(t)c + \int_{t_0}^t [f_1(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) + \\ & + \int_{\tau}^T f_2(\tau, s, x(s), h(s)) ds] d\tau \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y^*(t) = & X(t)c + \int_{t_0}^t [f_1(t, \tau, y(\tau), g(\tau)) + \\ & + \int_{\tau}^T f_2(\tau, s, y(s), g(s)) ds] d\tau, \end{aligned}$$

то из неравенств (2.27)—(2.29) и (2.24), (2.25) следует, что

$$\|x^* - y^*\| \leq$$

$$\leq 2n^2L((T - t_0) + 1)(T - t_0)\|\varphi - \psi\|. \quad (2.30)$$

При этом, согласно неравенству треугольника, несложно заметить, что

$$\|\varphi^* - \psi^*\| \leq \|x^* - y^*\| + \|h^* - g^*\|. \quad (2.31)$$

Поэтому, объединяя неравенства (2.26), (2.30) и (2.31), окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} \|\varphi^* - \psi^*\| &= \|F\varphi - F\psi\| \leq \\ &\leq 4n^2L((T - t_0) + 1)(T - t_0)\|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Таким образом, если

$$4n^2L((T - t_0) + 1)(T - t_0) < 1, \quad (2.32)$$

то, полагая

$$k = 4n^2L((T - t_0) + 1)(T - t_0),$$

видим, что при выполнении условия (2.32) выполнены также и условия (2.20) и (2.21). Сказанное означает, что существует такое действительное число T_0 , что при $t_0 < T < T_0$ число T удовлетворяет условиям (2.19) и (2.32) и обеспечивает выполнение требований, предъявляемых к (2.18), (2.20) и (2.21). Поэтому везде в дальнейшем будем считать число T заданным столь малым, что неравенства (2.19) и (2.32) для него выполнены.

Для всех значений $t_0 \leq t \leq T$ и $N = 0, 1, 2, \dots$ положим

$$\varphi_N(t) = (x_N(t), h_N(t))$$

и построим последовательность функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N, \dots, \quad (2.33)$$

определенных и непрерывных на отрезке $[t_0, T]$, в силу системы (2.10), (2.11) приняв

$$\varphi_{N+1} = F\varphi_N, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

и

$$\varphi_0(t) \equiv (c, h_0). \quad (2.35)$$

Поскольку функция (2.35) принадлежит к множеству Ω_T , то согласно равенству (2.34) все функции последовательности (2.33) также принадлежат к Ω_T . Рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi = F\varphi, \quad (2.36)$$

в котором в силу условий (2.20), (2.21) F является сжимающим оператором, отображающим множество Ω_T в себя. Поэтому уравнение (2.36)

имеет на множестве Ω решение φ^* , которое может быть получено по формуле

$$\varphi^*(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(t), \quad (2.37)$$

где сходимость равномерна на отрезке $[t_0, T]$ (см., например, [5, с. 165]). Но, так как по построению

$$h_0 = Qz(T),$$

то согласно (2.35) последовательность (2.34) удовлетворяет начальным приближениям (1.23) и (1.24). Поэтому из равенств (1.18) и (2.37) следует существование функций $u^*(t)$ и $x^*(t)$, построенных по формулам (2.1) и (2.2), причем функция $x^*(t)$ является соответствующим $u^*(t)$ решением уравнения (0.1) с начальным условием (2.3). При этом уравнение (1.21) с граничным условием (1.22) переходит в уравнение (2.5) с граничным условием (2.6), а закон управления (1.18) — в (2.4). Более того, по построению

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(u_N) = J(u^*)$$

и

$$J_N(u_N) \leq J_N(u)$$

для всех $u \in L_2^T$, откуда и следует цепочка (2.7). Таким образом, теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Необходимо отметить, что если задача (0.1)—(0.3) имеет решение класса L_2^T , то цепочка (2.7) не гарантирует того, что функция u^* будет именно этим решением. Другими словами, в общем случае функция u^* является только лишь приближением к решению исходной задачи, качество которого оценивается цепочкой (2.7). При этом автономность системы (0.1) и постоянство матриц Q и R в настоящей работе фактически нигде не используется и приняты исключительно для простоты обозначений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1972.
3. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964.
4. Красовский А.А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1969.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 25 октября 2002 г.