УДК 517.917

МАЛЫЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ И ПЕРЕМЕННЫМ СВОБОДНЫМ ЧЛЕНОМ

© В.И. Фомин

Fomin V.I. Small stabilisation perturbations of degenerate linear differential equation of the first order with constant bounded operator coefficient and variable free term. The article analyses the application of the degenerate differential equation of the first order in Banach space.

В банаховом пространстве E исследуется вырождающееся уравнение

$$t^{\alpha}x'(t)=Ax(t)+f(t), \qquad 0<t<\infty, \tag{1}$$

где $x(t)$ – искомая функция со значениями в E; $A\in L(E)$; $f(t)\in C([0,\infty);E)$; $\alpha\in R$, $\alpha\geq 1$.

Рассмотрим стабилизирующее возмущение уравнения (1) малым положительным параметром $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0=\mathrm{const}$):

$$\begin{cases}(t+\varepsilon)^{\alpha}x'_{\varepsilon}(t)=Ax_{\varepsilon}(t)+f(t), \quad 0\leq t<\infty, & (2)\\ x_{\varepsilon}(0)=x_{\varepsilon,0}. & (3)\end{cases}$$

Лемма 1. При любом фиксированном $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ задача (2), (3) при $\alpha=1$ имеет решение

$$x_{\varepsilon,1}(t)=\exp\left(A\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)x_{\varepsilon,0}+$$
$$+\int_0^t\exp\left(A\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\frac{f(s)}{s+\varepsilon}ds. \tag{4}$$

Лемма 1 доказывается непосредственной подстановкой функции (4) в уравнение (2) и проверкой для нее начального условия (3).

Пусть $\nu=max\{Re\,\lambda\mid\lambda\in\delta(A)\}$. Тогда

$$\| e^{At}\|\leq M_2e^{\nu_\delta t}, \quad 0\leq t<\infty, \tag{5}$$

где $M_2>0$, $\nu_\delta=\nu+\delta$, δ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Замечание 1. В дальнейшем в оценке (5) число δ берется настолько малым, что $\nu_\delta<0$ при $\nu<0$ и $\nu_\delta<-1$ при $\nu<-1$.

Лемма 2. Пусть $\nu<0$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^{-\nu_\delta}\| x_{\varepsilon,0}\|\right)=0. \tag{6}$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x_{\varepsilon,1}(t)=J_1(t), \ t\in(0,\infty), \tag{7}$$

где

$$J_1(t)=\int_0^t\exp\left(A\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}ds, \qquad t\in(0,\infty). \tag{8}$$

Предельная функция $J_1(t)$ ограничена при $t\to+0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $J_1(t)$ ограничена на $[0,\infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t\in(0,\infty)$. Покажем вначале сходимость несобственного интеграла (8).

Пусть

$$M(t)=\max_{0\leq s\leq t}\| f(s)\|.$$

В силу (5)

$$\| J_1(t)\|\leq\int_0^t\left\|\exp\left(A\ln\frac{t}{s}\right)\right\|\frac{\| f(s)\|}{s}ds \leq$$
$$\leq M_2M(t)\int_0^t\left(\frac{t}{s}\right)^{\nu_\delta}\frac{ds}{s}=M_2M(t)t^{\nu_\delta}\int_0^t s^{-\nu_\delta-1}ds=$$
$$=M_2M(t)t^{\nu_\delta}\left.\frac{s^{-\nu_\delta}}{-\nu_\delta}\right|_0^t=\frac{M_2}{-\nu_\delta}M(t),$$

ибо $-\nu_\delta>0$ в силу замечания 1. Итак,

$$\| J_1(t)\|\leq\frac{M_2}{-\nu_\delta}M(t). \tag{9}$$

Из (9) следует сходимость несобственного интеграла (8), ограниченность функции $J_1(t)$ при $t\to+0$. Если

$$\sup_{0\leq t<\infty}\| f(t)\|\leq M,$$

то в силу (9)

$$\| J_1(t) \| \le \frac{M_2 M}{-\nu_\delta}, \quad 0 < t < \infty,$$

то есть $J_1(t)$ ограничена на $(0, \infty)$.

Докажем предельный переход (7). Покажем вначале, что

$$\exp\left(A \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) x_{\varepsilon,0} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0. \tag{10}$$

В силу (5), (6)

$$\| \exp\left(A \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) x_{\varepsilon,0} \| \le \| \exp\left(A \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \| \, \| x_{\varepsilon,0} \| \le$$

$$\le M_2 \left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\nu_\delta} \| x_{\varepsilon,0} \| = M_2 (t+\varepsilon)^{\nu_\delta} \left(\varepsilon^{-\nu_\delta} \| x_{\varepsilon,0} \|\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$

откуда следует (10). Для доказательства (7) осталось показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t [g_\varepsilon(s,t) - g(s,t)] ds = 0, \tag{11}$$

где

$$g_\varepsilon(s,t) = \exp\left(A \ln \frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right) \frac{f(s)}{s+\varepsilon},$$

$$g(s,t) = \exp\left(A \ln \frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s}.$$

Имеем:

$$g_\varepsilon(s,t) - g(s,t) = \left[\frac{1}{s+\tau} \exp\left(A \ln \frac{t+\tau}{s+\tau}\right) \Bigg|_0^\varepsilon \right] f(s) =$$

$$= \left[-\int_0^\varepsilon \frac{1}{(s+\tau)^2} \left(I + \frac{t-s}{t+\tau} A\right) \exp\left(A \ln \frac{t+\tau}{s+\tau}\right) d\tau \right] f(s).$$

Тогда

$$\int_0^t [g_\varepsilon(s,t) - g(s,t)] \, ds =$$

$$= -\int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \left(I + \frac{t-s}{t+\tau} A\right) \exp\left(A \ln \frac{t+\tau}{s+\tau}\right) \frac{d\tau}{(s+\tau)^2} \right] f(s) ds$$

и в силу (5)

$$\| \int_0^t [g_\varepsilon(s,t) - g(s,t)] ds \| \le \int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) - g(s,t) \| \, ds \le$$

$$\le \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \left(1 + \frac{t-s}{t+\tau} \| A \|\right) \| \exp\left(A \ln \frac{t+\tau}{s+\tau}\right) \| \frac{d\tau}{(s+\tau)^2} \right] \| f(s) \| \, ds \le$$

$$\le M(t) M_2 \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon (1 + \| A \|) \left(\frac{t+\tau}{s+\tau}\right)^{\nu_\delta} \frac{d\tau}{(s+\tau)^2} \right] ds =$$

$$= M_2 (1 + \| A \|) M(t) \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon (t+\tau)^{\nu_\delta} (s+\tau)^{-\nu_\delta - 2} d\tau \right] ds \le$$

$$\le M_2 (1 + \| A \|) M(t) t^{\nu_\delta} \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon (s+\tau)^{-\nu_\delta - 2} d\tau \right] ds =$$

$$= M_2 (1 + \| A \|) M(t) t^{\nu_\delta} \int_0^t \left[\frac{(s+\tau)^{-\nu_\delta - 1}}{-\nu_\delta - 1} \Bigg|_0^\varepsilon \right] ds =$$

$$= \frac{M_2}{-\nu_\delta - 1} (1 + \| A \|) M(t) t^{\nu_\delta} \int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-\nu_\delta - 1} - s^{-\nu_\delta - 1} \right] ds =$$

$$= \frac{M_2}{-\nu_\delta - 1} (1 + \| A \|) M(t) t^{\nu_\delta} \left[\frac{(s+\varepsilon)^{-\nu_\delta}}{-\nu_\delta} \Bigg|_0^t - \frac{s^{-\nu_\delta}}{-\nu_\delta} \Bigg|_0^t \right] =$$

$$= \frac{M_2}{\nu_\delta (\nu_\delta + 1)} (1 + \| A \|) M(t) t^{\nu_\delta} \left[(t+\varepsilon)^{-\nu_\delta} - \varepsilon^{-\nu_\delta} - t^{-\nu_\delta} \right].$$

Итак,

$$\| \int_0^t [g_\varepsilon(s,t) - g(s,t)] ds \| \le \frac{M_2 (1 + \| A \|)}{\nu_\delta (\nu_\delta + 1)} M(t) t^{\nu_\delta} \times$$

$$\times \left[(t+\varepsilon)^{-\nu_\delta} - \varepsilon^{-\nu_\delta} - t^{-\nu_\delta} \right]. \tag{12}$$

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[(t+\varepsilon)^{-\nu_\delta} - \varepsilon^{-\nu_\delta} - t^{-\nu_\delta} \right] = 0. \tag{13}$$

В силу (13) из (12) следует справедливость (11).
Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $\nu < -1$. Тогда предельная функция $J_1(t)$ является решением уравнения (1) при $\alpha = 1$.

Доказательство. Выясним поведение подинтегральной функции $g(s,t)$ при $s \to +0$. В силу (5) при любом $s \in (0,t]$

$$\| g(s,t) \| \le \| \exp\left(A \ln \frac{t}{s}\right) \| \frac{\| f(s) \|}{s} \le M_2 \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu_\delta} M(t) \frac{1}{s} =$$

$$= M_2 M(t) t^{\nu_\delta} s^{-\nu_\delta - 1} \xrightarrow[s \to +0]{} 0, \tag{14}$$

ибо $-\nu_\delta - 1 > 0$ в силу замечания 1. В силу (14)

$$\lim_{s \to +0} g(s,t) = 0. \tag{15}$$

В силу (15) функцию $g(s,t)$ можно доопределить по непрерывности в нуле:

$$g(0,t) = \lim_{s \to +0} g(s,t) = 0. \tag{16}$$

В силу (16) функция $g(s,t)$ непрерывна по s,t.

Далее:

$$\left[g(s,t)\right]_t' = A\exp\left(A\ln\frac{t}{s}\right)\frac{s}{t}\frac{1}{s}\frac{f(s)}{s} = \frac{1}{t}Ag(s,t). \quad (17)$$

В силу (15), (17)

$$\lim_{s\to+0}\left[g(s,t)\right]_t' = 0. \quad (18)$$

В силу (18) производную $\left[g(s,t)\right]_t'$ можно доопределить по непрерывности в нуле:

$$\left[g(s,t)\right]_t'\Big|_{s=0} = \lim_{s\to+0}\left[g(s,t)\right]_t' = 0. \quad (19)$$

В силу (19) $\left[g(s,t)\right]_t'$ непрерывна по *s,t*.

Итак, подинтегральная функция $g(s,t)$ и ее производная $\left[g(s,t)\right]_t'$ непрерывны по *s,t*. Следовательно, можно применить правило дифференцирования интеграла по параметру:

$$J_1'(t) = \int_0^t A\exp\left(A\ln\frac{t}{s}\right)\frac{s}{t}\frac{1}{s}\frac{f(s)}{s}ds + 1\times\exp\left(A\ln\frac{t}{t}\right)\frac{f(t)}{t} =$$

$$= \frac{1}{t}A\int_0^t \exp\left(A\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}ds + \frac{1}{t}f(t) = \frac{1}{t}\left[AJ_1(t) + f(t)\right].$$

Получили:

$$J_1'(t) = \frac{1}{t}\left[AJ_1(t) + f(t)\right].$$

Тогда

$$tJ_1'(t) = AJ_1(t) + f(t). \quad (20)$$

(20) означает, что функция $J_1(t)$ является решением уравнения (1) при $\alpha = 1$.

Лемма 3 доказана.

В силу лемм 1–3 справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (2), (3) при $\alpha = 1$ имеет решение (4). При $\nu < 0$ и выполнении условия (6) справедлив предельный переход (7). При $\nu < -1$ предельная функция $J_1(t)$ является решением предельного ($\varepsilon = 0$) уравнения (1) при $\alpha = 1$. Это решение ограничено при $t \to +0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $J_1(t)$ ограничено на $(0, \infty)$.

Аналогично доказываются следущие утверждения.

Лемма 4. При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (2), (3) при $\alpha > 1$ имеет решение

$$x_{\varepsilon,\alpha}(t) = \exp\left\{A\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}}\right)\right]\right\}x_{\varepsilon,0} +$$

$$+\int_0^t \exp\left\{A\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s+\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}}\right)\right]\right\}\frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{\alpha}}ds. \quad (21)$$

Лемма 5. Пусть $\nu < 0$ и

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left[\|x_{\varepsilon,0}\|\exp\left(\frac{\nu_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right)\right] = 0. \quad (22)$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to0}x_{\varepsilon,\alpha}(t) = J_\alpha(t), \quad t\in(0,\infty), \quad (23)$$

где

$$J_\alpha(t) = \int_0^t \exp\left\{A\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right]\right\}\frac{f(s)}{s^\alpha}ds,$$

$$t\in(0,\infty). \quad (24)$$

Предельная функция $J_\alpha(t)$ ограничена при $t\to +0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $J_\alpha(t)$ ограничена на $(0,\infty)$.

Лемма 6. Предельная функция $J_\alpha(t)$ является решением уравнения (1).

Теорема 2. При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (2), (3) при $\alpha > 1$ имеет решение (21). При $\nu < 0$ и выполнении условия (22) справедлив предельный переход (23). Предельная функция $J_\alpha(t)$ является решением предельного ($\varepsilon = 0$) уравнения (1). Это решение ограничено при $t\to +0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $J_\alpha(t)$ ограничена на $(0,\infty)$.

Данная работа обобщает результаты [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фомин В.И.* Малые стабилизирующие возмущения вырождающегося линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянным ограниченным коэффициентом и постоянным свободным членом // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. Тамбов, 1999. Т. 4. Вып. 3. С. 347-352.

Поступила в редакцию 15 декабря 1999 г.