УДК 517.98

Квантование на пара-эрмитовых симметрических пространствах [1]

© В. Ф. Молчанов

Ключевые слова: представления групп Ли; эрмитовы симметрические пространства; пара-эрмитовы симметрические пространства; исчисления символов.

Строится квантование (исчисление символов) в духе Березина на пара-эрмитовых симметрических пространствах.

§ 1. Квантование по Березину

Напомним концепцию квантования, предложенную Березиным, см. [1] – [3]. Мы не будем излагать ее в полной общности, мы ограничимся несколько упрощенной версией.

Пусть M – симплектическое многообразие. Тогда $C^\infty(M)$ является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона $\{A, B\}$, $A, B \in C^\infty(M)$.

Квантование в смысле Березина состоит из двух шагов.

Шаг первый: надо построить некоторую совокупность ассоциативных алгебр $\mathcal{A}(h)$, содержащихся в $C^\infty(M)$ и зависящих от параметра $h > 0$ (называемого постоянной Планка), умножение в $\mathcal{A}(h)$ обозначается $*$, оно тоже зависит от h. Эти алгебры должны удовлетворять следующим условиям (a) – (d):

$$(a) \quad \lim_{h\to 0} A_1 * A_2 = A_1 A_2; \tag{1.1}$$

$$(b) \quad \lim_{h\to 0} \frac{i}{h}(A_1 * A_2 - A_2 * A_1) = \{A_1, A_2\}; \tag{1.2}$$

умножение в правой части (1.1) есть обычное поточечное умножение; в правой части (1.2) стоит скобка Пуассона; условия (a), (b) вместе называются *принципом соответствия*;

(c) функция $A_0 \equiv 1$, тождественно равная единице, есть единичный элемент каждой алгебры $\mathcal{A}(h)$;

(d) комплексное сопряжение $A \mapsto \overline{A}$ есть анти-инволюция каждой алгебры $\mathcal{A}(h)$.

[1] Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.1.1.2.1474 и Темпланом 1.5.07.

Шаг второй: надо построить представления $A \mapsto \widehat{A}$ алгебр $\mathcal{A}(h)$ операторами в гильбертовом пространстве.

Березин главным образом исследовал случай, когда M есть эрмитово симметрическое пространство G/K. Следовательно, оно имеет инвариантную комплексную структуру. Пусть оно реализовано как ограниченная область в $\mathbb{C}^m$. В этом случае функции A – это функции $A(z,\overline{z})$, $z \in M$, раздельно аналитические по z и по $\overline{z}$. Комплексное сопряжение сводится к перестановке z и $\overline{z}$: $\overline{A(z,\overline{z})} = A(\overline{z}, z)$.

Пусть $B(z,\overline{z})$ – ядро Бергмана области M. Исходным пунктом в конструкции Березина является так называемая *переполненная система* (система когерентных состояний):

$$\Phi_{\overline{w}}(z) = \Phi(z,\overline{w}) = \Phi_\lambda(z,\overline{w}) = B(z,\overline{w})^{-\lambda/\varkappa},$$

где $\lambda < \lambda_0$ (λ_0 – некоторое число), $\varkappa$ – род соответствующей йордановой алгебры. Пусть $\mathcal{F}_\lambda$ – пространство Фока на M. Это – гильбертово пространство аналитических функций на M, квадратично интегрируемых относительно меры $c(\lambda) \cdot B(z,\overline{z})^{\lambda/\varkappa} d\nu(z)$, где $c(\lambda)$ – некоторый нормирующий множитель (аналитически зависящий от λ), $d\nu(z)$ – инвариантная мера на M. Функция $\Phi_{\overline{w}}(z)$ как функция от z принадлежит $\mathcal{F}_\lambda$ и обладает воспроизводящим свойством:

$$(f, \Phi_{\overline{w}}) = f(w),$$

скалярное произведение берется в $\mathcal{F}_\lambda$.

Пусть $\widehat{A}$ – ограниченный оператор в $\mathcal{F}_\lambda$. Сопоставим ему функцию от двух переменных $z, w \in M$:

$$A(z,\overline{w}) = \frac{1}{\Phi(z,\overline{w})} \left(\widehat{A}\Phi_{\overline{w}}\right)(z).$$

Ее ограничение на диагональ, т.е. функция $A(z,\overline{z})$, есть функция на M, она называется *ковариантным символом* оператора $\widehat{A}$. Функция $A(z,\overline{w})$ восстанавливается по $A(z,\overline{z})$ по аналитичности. Оператор $\widehat{A}$ вполне определяется своим ковариантным символом:

$$(\widehat{A}f)(z) = c \int\limits_M A(z,\overline{w}) \frac{\Phi(z,\overline{w})}{\Phi(w,\overline{w})} f(w)\, d\nu(w),$$

где $c = c(\lambda)$. Умножение операторов дает умножение символов:

$$(A_1 * A_2)(z,\overline{z}) = \int_M A_1(z,\overline{w})\, A_2(w,\overline{z}) \mathcal{B}(z,\overline{z}; w, \overline{w})\, d\nu(w), \tag{1.3}$$

где

$$\mathcal{B}(z,\overline{z}; w,\overline{w}) = c\, \frac{\Phi(z,\overline{w})\, \Phi(w,\overline{z})}{\Phi(z,\overline{z})\, \Phi(w,\overline{w})}.$$

Ядро $\mathcal{B}$ называется ядром Березина, оператор с этим ядром называется преобразованием Березина, оно действует в функциях на M. Березин ([3], см. также [14]) нашел выражение преобразования $\mathcal{B}$ через операторы Лапласа на M

(образующие в алгебре инвариантных дифференциальных операторов на M) и нашел асимптотику $\mathcal{B}$ при $\lambda \to -\infty$:

$$\mathcal{B} \sim 1 - \frac{1}{\lambda}\Delta, \tag{1.4}$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на M. Это решает задачу построения квантования на M: в качестве постоянной Планка надо взять $h = -1/\lambda$, алгебры $\mathcal{A}(h)$ состоят из ковариантных символов ограниченных операторов в пространстве Фока $\mathcal{F}_\lambda$ с умножением $*$, заданным (1.3), принцип соответствия вытекает из (1.4).

Кроме того, Березин определяет контравариантные символы операторов: функция $\overset{\circ}{A}(z,\overline{z})$ на M называется *контравариантным символом* оператора $\widehat{A}$, определяемого формулой

$$\left(\widehat{A}f\right)(z) = c\int_M \overset{\circ}{A}(w,\overline{w})\,\frac{\Phi(z,\overline{w})}{\Phi(w,\overline{w})}\,f(w)\,d\nu(w).$$

Оказывается, что переход от контравариантного символа к ковариантному символу того же самого оператора дается преобразованием Березина.

§ 2. Параэрмитовы симметрические пространства

В этом параграфе мы изложим необходимый нам материал из [13]. Пусть G – связная полупростая группа Ли. Пусть σ – некоторый нетривиальный инволютивный автоморфизм (инволюция) группы G. Обозначим через G^σ подгруппу, состоящую из неподвижных точек для σ. Пусть H – подгруппа в G, лежащая между G^σ и ее связной компонентой единицы $(G^\sigma)_e$:

$$(G^\sigma)_e \subset H \subset G^\sigma$$

(т. е. H – открытая подгруппа в G^σ). Однородное пространство G/H называется *полупростым симметрическим пространством*.

Как правило, мы будем считать, что группы действуют на своих однородных пространствах *справа*, так что G/H – это пространство правых классов смежности Hg.

Существует инволюция Картана τ группы G, коммутирующая с σ. Обозначим $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$. Положим $K = G^\tau$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G. Пусть $B_\mathfrak{g}$ – ее форма Киллинга.

Инволюции σ и τ индуцируют автоморфизмы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, мы их будем обозначать теми же самыми буквами σ и τ.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ собственных для σ подпространств с собственными значениями $+1$ и -1, соответственно. Аналогичное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ имеет место для инволюции τ. Подпространства $\mathfrak{h}$

и$\mathfrak{k}$ – алгебры Ли групп H и K, соответственно. Поскольку σ и τ коммутируют, имеет место совместное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}.$$

Подпространство $\mathfrak{q}$ инвариантно относительно группы H и ее алгебры $\mathfrak{h}$ в присоединенном представлении. Это подпространство можно отождествить с касательным пространством к G/H в точке $x^0 = He$ (e – единица группы G).

Картановским подпространством в $\mathfrak{q}$ называется максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{q}$, состоящая из полупростых элементов. Все такие подпространства имеют одинаковую размерность. Она называется *рангом* симметрического пространства G/H. Предположим, что пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ – эффективная, т.е. $\mathfrak{h}$ не содержит нетривиального идеала алгебры $\mathfrak{g}$.

Теперь предположим, что G/H – *симплектическое* многообразие. Тогда $\mathfrak{h}$ имеет ненулевой центр $Z(\mathfrak{h})$. Для простоты мы будем считать, что G/H есть G-орбита элемента $Z_0 \in \mathfrak{g}$ в присоединенном представлении Ad группы G. В частности, тогда $Z_0 \in Z(\mathfrak{h})$.

Далее, мы можем считать, что G – простая группа Ли. Симплектические полупростые симметрические пространства G/H с *простой* группой G делятся на 4 класса: (a) эрмитовы симметрические пространства; (b) полукэлеровы симметрические пространства; (c) параэрмитовы симметрические пространства; (d) комплексификации эрмитовых симметрических пространств. Пространства из класса (a) римановы, из остальных трех классов псевдоримановы (не римановы). Римановой формой для пространства из классов (b), (c), (d) служит эрмитово симметрическое пространство. Для пространств класса (a) алгебра Ли $\mathfrak{h}$ совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Для пространств классов (a), (b), (c) центр $Z(\mathfrak{h})$ одномерен, так что $Z(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}Z_0$. Для пространств класса (b) и (c) элемент Z_0 лежит соответственно в $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$.

Предметом нашего изучения будут пространства класса (c). В этом случае элемент Z_0 может быть нормирован так, что оператор $I = (\mathrm{ad}\, Z_0)\big|_{\mathfrak{q}}$ в $\mathfrak{q}$ является инволюцией. Симплектическая структура на G/H определяется билинейной формой

$$\omega(X, Y) = B_{\mathfrak{g}}(X, IY)$$

на $\mathfrak{q}$. Пусть $\mathfrak{q}^{\pm}$ – собственные для I подпространства в $\mathfrak{q}$ с собственными значениями ± 1, соответственно. Оба эти подпространства являются абелевыми подалгебрами в $\mathfrak{g}$, они инвариантны относительно H и неприводимы. Кроме того, оба эти подпространства лагранжевы. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ становится градуированной алгеброй:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q}^- + \mathfrak{h} + \mathfrak{q}^+$$

с соотношениями коммутации $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{q}^-] \subset \mathfrak{q}^-$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{q}^+] \subset \mathfrak{q}^+$.

Введем характер $h \mapsto b(h)$ группы H (он нетривиален):

$$b(h) = \det(\mathrm{Ad} h)|_{\mathfrak{q}^+}.$$

Инволюция σ сохраняет подпространства $\mathfrak{q}^{\pm}$, инволюции τ и θ дают линейные изоморфизмы $\mathfrak{q}^{\pm} \to \mathfrak{q}^{\mp}$. Кроме того, мы получаем следующие линейные изоморфизмы:

$$1+\tau:\ \mathfrak{q}^{\pm}\to\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q},\quad 1-\tau:\ \mathfrak{q}^{\pm}\to\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q},$$

а также изоморфизм $\psi:\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}\to\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$, определенный формулой

$$\psi(X+\tau X)=X-\tau X,\quad X\in\mathfrak{q}^{+}.$$

Отображение ψ определяет двойственность между двумя римановыми симметрическими алгебрами $(\mathfrak{k},\mathfrak{k}\cup\mathfrak{h},\sigma)$ и $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{k}\cup\mathfrak{h},\sigma)$, где $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}+\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$. Первая из них компактного типа, вторая – некомпактного.

Пара $(\mathfrak{q}^+,\mathfrak{q}^-)$ есть йорданова пара с умножением $\{XYZ\}=(1/2)\,[[X,Y],\,Z]$, см. [12]. Пусть r и $\varkappa$ – ранг и род этой йордановой пары. Возьмем в $\mathfrak{q}^+$ максимальную систему $e_1,\ldots,e_r$ попарно ортогональных идемпотентов: $\{e_ie_j^*e_j\}=\delta_{ij}e_j$, где $e_j^*=-\tau e_j\in\mathfrak{q}^-$. Пусть $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$, $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}$ – подпространства с базисами $X_i=e_i+e_i^*$ и $Y_i=e_i-e_i^*$, соответственно. Они – максимальные абелевы подпространства (картановские подпространства) в $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ и даже в $\mathfrak{q}$. Мы видим, что ранги пары $(\mathfrak{q}^+,\mathfrak{q}^-)$ и пространств G/H и $K/(K\cap H)$ совпадают (так что, в частности, G/H обладает дискретной серией).

Положим $Q^{\pm}=\exp\mathfrak{q}^{\pm}$. Подгруппы $P^{\pm}=HQ^{\pm}=Q^{\pm}H$ являются максимальными параболическими подгруппами в G, для них H есть подгруппа Леви. Мы имеем следующие разложения:

$$\begin{aligned} G &= \overline{Q^+HQ^-} && (2.1)\\ &= \overline{Q^-HQ^+} && (2.2)\\ &= Q^+HK && (2.3)\\ &= Q^-HK, && (2.4)\end{aligned}$$

где черта означает замыкание, а множества под чертой открыты и плотны в G. Назовем разложения (2.1) – (2.4) соответственнно разложениями Гаусса, "анти–Гаусса Ивасавы, "анти–Ивасавы". Для элемента $g\in G$ все три множителя, соответствующие разложениям (2.1), (2.2), а так же первые множители, соответствующие (2.3), (2.4), определены однозначно, а вторые и третьи множители, соответствующие (2.3), (2.4), определены с точностью до элемента из $K\cap H$ (например, для (2.3): $g=\zeta hk=\zeta h_1k_1$, где $h_1=hl$, $k_1=l^{-1}k$, $l\in K\cap H$).

Для всякого элемента $g\in G$ определим преобразование $\xi\mapsto\widetilde{\xi}=\xi\bullet g$ пространства $\mathfrak{q}^-$ и преобразование $\eta\mapsto\widehat{\eta}=\eta\circ g$ пространства $\mathfrak{q}^+$ с помощью разложений Гаусса и "анти-Гаусса" соответственно:

$$\begin{aligned}\exp\xi\cdot g &= \exp Y\cdot\widetilde{h}\cdot\exp\widetilde{\xi}, && (2.5)\\ \exp\eta\cdot g &= \exp X\cdot\widehat{h}\cdot\exp\widehat{\eta}, && (2.6)\end{aligned}$$

где $X\in\mathfrak{q}^-$, $Y\in\mathfrak{q}^+$. Эти действия определены на открытых и плотных множествах, зависящих от g.

Следовательно, G действует на $\mathfrak{q}^-\times\mathfrak{q}^+:\ (\xi,\eta)\mapsto(\widetilde{\xi},\widehat{\eta})$. Стационарная подгруппа точки $(0,0)\in\mathfrak{q}^-\times\mathfrak{q}^+$ есть $P^+\cap P^-=H$, так что мы получаем вложение

$$\mathfrak{q}^-\times\mathfrak{q}^+\hookrightarrow G/H. \qquad (2.7)$$

Оно определено на открытом и плотном множестве, его образ – тоже открытое и плотное множество. Следовательно, мы можем рассматривать ξ, η как координаты на G/H, назовем их *орисферическими координатами.*

Однородные пространства $S^+ = G/P^-$, $S^- = G/P^+$, $S = K/K \cap H$ – компактные многообразия, диффеоморфные друг другу с помощью соответствия

$$s^0 k \longleftrightarrow s^{\pm} k, \quad k \in K, \tag{2.8}$$

где $s^+ = P^- e$, $s^- = P^+ e$, $s^0 = (K \cap H)e$ – базисные точки, e – единица группы. Естественные действия группы G на $S^{\pm}$ дают два действия группы G на S: $s \mapsto \widetilde{s}$ и $s \mapsto \widehat{s}$, где $s = s^0 k$, $\widetilde{s} = s^0 \widetilde{k}$, $\widehat{s} = s^0 \widehat{k}$, а $\widetilde{k}$ и $\widehat{k}$ получается из разложений Ивасавы и анти-Ивасавы

$$kg = \exp Y_1 \cdot \widetilde{h}_1 \cdot \widetilde{k}. \tag{2.9}$$

$$kg = \exp X_1 \cdot \widehat{h}_1 \cdot \widehat{k}. \tag{2.10}$$

Обозначим

$$\widetilde{s} = s \cdot g; \tag{2.11}$$

тогда

$$\widehat{s} = s \cdot \tau(g). \tag{2.12}$$

Группа G действует на $S^- \times S^+$ естественым образом. Стационарная подгруппа точки (s^-, s^+) есть снова H, так что мы получаем следующее эквивариантное вложение

$$G/H \hookrightarrow S^- \times S^+. \tag{2.13}$$

Отождествления (2.8) дают эквивариантное вложение

$$G/H \hookrightarrow S \times S, \tag{2.14}$$

где G действует на $S \times S$ следующим образом: $(s,t) \mapsto (\widetilde{s}, \widehat{t})$. Таким образом, s, t служат координатами на G/H, назовем их тоже орисферическими. Образ вложения (2.14) есть одна открытая и плотная G-орбита. Обозначим ее Ω. Таким образом, $S \times S$ есть некоторая компактификация пространства G/H. По поводу структуры пространства G-орбит на $S \times S$ см. [10]. Отметим, что пространство G/H можно рассматривать как касательное (или кокасательное) расслоение многообразия S.

Связь между разложениями Гаусса и "анти–Гаусса" дает нам очень важные оператор и функцию, см. ниже (2.16), (2.17). Пусть $\xi \in \mathfrak{q}^-$, $\eta \in \mathfrak{q}^+$. Разложим произведение "анти–Гаусса" $\exp \xi \cdot \exp(-\eta)$ по Гауссу:

$$\exp \xi \cdot \exp(-\eta) = \exp Y \cdot h \cdot \exp X, \tag{2.15}$$

где $X \in \mathfrak{q}^-$, $Y \in \mathfrak{q}^+$. Обозначим полученный элемент $h \in H$ через $h(\xi, \eta)$. Определим оператор $K(\xi, \eta)$ на $\mathfrak{q}^+$:

$$K(\xi, \eta) = \operatorname{Ad} h(\xi, \eta)^{-1} \Big|_{\mathfrak{q}^+}. \tag{2.16}$$

Это – аналог преобразования Бергмана для эрмитовых симметрических пространств. В терминах йордановых пар этот оператор записывается так:

$$K(\xi,\eta)T = T - 2\{\eta\xi T\} + \{\eta\{\xi T\xi\}\eta\}.$$

При действии группы G оператор $K(\xi,\eta)$ преобразуется следующим образом:

$$K(\widetilde{\xi},\widehat{\eta}) = \left(\mathrm{Ad}\,\widehat{h}^{-1}\right)_{\mathfrak{q}^+} K(\xi,\eta) \left(\mathrm{Ad}\,\widetilde{h}\right)_{\mathfrak{q}^+},$$

где $\widetilde{h}$ и $\widehat{h}$ берутся из (2.5) и (2.6), соответственно.

Определитель $\det K(\xi,\eta)$ есть многочлен от ξ,η. Более того (см. [12]), он есть степень $N(\xi,\eta)^{\varkappa}$ неприводимого многочлена $N(\xi,\eta)$ степени r по ξ и по η отдельно. В силу (2.7) мы можем функцию

$$b(\xi,\eta) = \underline{(}h(\xi,\eta)) = [\det K(\xi,\eta)]^{-1} = N(\xi,\eta)^{-\varkappa} \tag{2.17}$$

рассматривать как функцию на G/H. Это аналог ядра Бергмана. Она инвариантна относительно H.

Напишем в орисферических координатах метрику ds^2, симплектическую форму ω и меру dx на G/H, инвариантные относительно G.

Размерность пространства G/H и, следовательно, размерность пространства $\mathfrak{q}$ – четная, пусть она будет равна $2m$. Тогда ограничение на $\mathfrak{q}$ формы Киллинга $B_{\mathfrak{g}}$ имеет сигнатуру (m,m). Отождествим пространство $\mathfrak{q}^-$ с пространством $\mathbb{R}^m$ каким-нибудь способом: например, возьмем в $\mathfrak{q}^-$ базис $E_1,\ldots,E_m$ так, чтобы $B_{\mathfrak{g}}(E_i,\theta E_j) = c\,\delta_{ij}$, где c – некоторый множитель, и отождествим его со стандартным базисом в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\theta E_1,\ldots,\theta E_m$ – базис в $\mathfrak{q}^+$. Пусть ξ_i и η_i – координаты в $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$ в этих базисах соответственно. Возьмем в $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$ евклидовы меры $d\xi = d\xi_1\ldots d\xi_m$ и $d\eta = d\eta_1\ldots d\eta_m$, соответственно. Обозначим через $k^{ij}(\xi,\eta)$ матричные элементы оператора $K(\xi,\eta)^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2\sum k^{ij}(\xi,\eta)\,d\xi_i d\eta_j, \\ \omega &= 2\sum k^{ij}(\xi,\eta)\,d\xi_i\wedge d\eta_j, \\ dx &= |b(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Сходство первой и второй формул отражает тот факт, что G/H имеет структуру многообразия над алгеброй "двойных чисел" $z = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$, $i^2 = 1$.

Функция $F(\xi,\eta) = \ln b(\xi,\eta)$ есть потенциал метрики:

$$2k^{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial\xi_i\partial\eta_j}.$$

Пространства $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$ могут быть вложены в S:

$$\xi\mapsto s^0\cdot\exp\xi, \quad \eta\mapsto s^0\cdot\exp\tau(\eta),$$

где $\xi \in \mathfrak{q}^-$, $\eta \in \mathfrak{q}^+$, с открытыми и плотными образами. Следовательно, мы можем рассматривать как $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$, так и $\eta = (\eta_1, ..., \eta_m)$ в качестве координат в S. В этих координатах K-инвариантная мера ds на S записывается так:

$$ds = \sqrt{b(\xi, \theta(\xi))}\, d\xi \tag{2.19}$$

$$= \sqrt{b(\theta(\eta), \eta)}\, d\eta. \tag{2.20}$$

Определим теперь следующую важную функцию $||s,t||$ на $S \times S$. Для $s, t \in S$ возьмем k_s, $k_t \in K$ так, чтобы $s^0 k_s = s$, $s^0 k_t = t$. Применим к $k_s k_t^{-1}$ разложение Гаусса:

$$k_s k_t^{-1} = \exp Y \cdot h \cdot \exp X. \tag{2.21}$$

Оказывается, что для h из (2.21) определитель оператора $(\mathrm{Ad}\, h)_{\mathfrak{q}^+}$ зависит только от s и t и не зависит от выбора представителей k_s и k_t. Положим

$$||s,t|| = |(\det \mathrm{Ad}\, h)_{\mathfrak{q}^+}|^{-1/\varkappa}, \tag{2.22}$$

где h берется из (2.21). Формула (2.22) определяет функцию $||s,t||$ на открытом плотном множестве в $S \times S$. Эта функция непрерывна, симметрична (т.е. $||s,t|| = ||t,s||$) и инвариантна относительно диагонального действия группы K, т. е. $||sk, tk|| = ||s,t||$. Ее можно распространить по непрерывности на все $S \times S$ с сохранением этих свойств. Напишем ее явное выражение. В силу K-инвариантности достаточно это сделать для точек из $(s^0, s^0 \exp \mathfrak{b})$ с $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$, см. выше. Используя базис Y_i в $\mathfrak{b}$, мы получаем

$$||s^0, s^0 \exp \sum u_i Y_i|| = |\cos u_1| \ldots |\cos u_r|. \tag{2.23}$$

Теперь мы можем переписать (2.18) следующим образом:

$$dx = dx(s,t) = ||s,t||^{-\varkappa}\, ds\, dt,$$

где $x \mapsto (s,t)$ по (2.14). Орбита Ω характеризуется условием $||s,t|| \neq 0$.

Следующая таблица содержит список простых симметрических алгебр Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, которые отвечают параэрмитовым симметрическим пространствам G/H с простой G, см. [11]. Здесь $G_{pq}(\mathbb{F})$ обозначает грассманово многообразие p-мерных плоскостей в $\mathbb{F}^n$, где $\mathbb{F}$ есть $\mathbb{R}$ либо $\mathbb{H}$, $n = p + q$; S^{m-1} есть сфера в $\mathbb{R}^m$; $P_2(\mathbb{O})$ обозначает октавную проективную плоскость. По эстетическим причинам мы обозначаем алгебры Ли заглавными латинскими буквами вместо строчных готических.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	S
$\mathrm{SL}\,(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{SL}\,(p,\mathbb{R})+\mathrm{SL}(q,\mathbb{R})+\mathbb{R}$	$G_{pq}(\mathbb{R})$
$\mathrm{SU}^*(2n)$	$\mathrm{SU}^*(2p)+\mathrm{SU}^*(2q)+\mathbb{R}$	$G_{pq}(\mathbb{H})$
$\mathrm{SU}(n,n)$	$\mathrm{SL}\,(n,\mathbb{C})+\mathbb{R}$	$\mathrm{U}(n)$
$\mathrm{SO}^*(4n)$	$\mathrm{SU}^*(2n)+\mathbb{R}$	$\mathrm{U}(2n)/\mathrm{Sp}(n)$
$\mathrm{SO}\,(n,n)$	$\mathrm{SL}\,(n,\mathbb{R})+\mathbb{R}$	$\mathrm{SO}(n)$
$\mathrm{SO}\,(p,q)$	$\mathrm{SO}\,(p-1,q-1)+\mathbb{R}$	$(S^{r-1}\times S^{q-1})/\mathbb{Z}_2$
$\mathrm{Sp}\,(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{SL}\,(n,\mathbb{R})+\mathbb{R}$	$\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$
$\mathrm{Sp}\,(n,n)$	$\mathrm{SU}^*(2n)+\mathbb{R}$	$\mathrm{Sp}(n)$
$\mathrm{E}_{6(6)}$	$\mathrm{SO}\,(5,5)+\mathbb{R}$	$G_{22}(\mathbb{H})/\mathbb{Z}_2$
$\mathrm{E}_{6(-26)}$	$\mathrm{SO}\,(1,9)+\mathbb{R}$	$P_2(\mathbb{O})$
$\mathrm{E}_{7(7)}$	$\mathrm{E}_{6(6)}+\mathbb{R}$	$\mathrm{SU}(8)/\mathrm{Sp}(4)\cdot\mathbb{Z}_2$
$\mathrm{E}_{7(-25)}$	$\mathrm{E}_{6(-26)}+\mathbb{R}$	$S^1\cdot E_6/F_4$

§ 3. Максимально вырожденные представления

В этом параграфе мы рассмотрим серии представлений группы G, индуцированных характерами максимальных параболических подгрупп $P^{\pm}$, см. § 1. Мы в основном опираемся на [13].

Пусть ω_λ, $\lambda\in\mathbb{C}$, обозначает следующий характер подгруппы H:

$$\omega_\lambda(h)=|b(h)|^{-\lambda/\varkappa}. \tag{3.1}$$

Распространим этот характер на подгруппы P^+ и P^-, полагая его равным 1 на Q^+ и Q^-. Рассмотрим индуцированные представления группы G:

$$\pi_\lambda^{\pm}=\mathrm{Ind}_{P^{\mp}}^{G}\,\omega_{\mp\lambda}.$$

Представление $\pi_\lambda^{\pm}$ действует правыми сдвигами:

$$\left(\pi_\lambda^{\pm}(g)f\right)(g_1)=f(g_1g)$$

в пространстве $\mathcal{D}_\lambda^{\pm}(G)$ функций $f\in C^\infty(G)$, удовлетворяющих условию

$$f(pg)=\omega_{\mp\lambda}(p)f(g),\quad p\in P^{\mp}.$$

Рассмотрим реализацию представлений $\pi_\lambda^{\pm}$ в компактной картине. Они действуют в пространстве $\mathcal{D}(S)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\left(\pi_\lambda^{-}(g)\varphi\right)(s) &= \omega_\lambda(\widetilde{h}_1)\varphi(\widetilde{s}),\\ \left(\pi_\lambda^{+}(g)\varphi\right)(s) &= \omega_\lambda(\widehat{h}_1)\varphi(\widehat{s}),\end{aligned}$$

мы используем (2.9), (2.10) и полагаем $s=s^0k$, $\widetilde{s}=s^0\widetilde{k}$, $\widehat{s}=s^0\widehat{k}$. Заметим, что $\omega_\lambda(\widetilde{h}_1)$ и $\omega_\lambda(\widehat{h}_1)$ определены корректно, поскольку $\omega_\lambda(l)=1$ для $l\in K\cap H$.

Представления $\pi_\lambda^\pm$ с одним и тем же параметром λ связаны с помощью инволюции τ: $\pi_\lambda^\pm = \pi_\lambda^\mp \circ \tau$, так что если τ – внутренний автоморфизм, то π_λ^+ и π_λ^- эквивалентны.

Рассмотрим следующую эрмитову форму в $\mathcal{D}(S)$:

$$(\psi, \varphi)_S = \int_S \psi(s)\overline{\varphi(s)}\, ds, \tag{3.2}$$

где мера ds дается формулой (2.19) или (2.20). Эта форма инвариантна относительно пар $\left(\pi_\lambda^+,\, \pi_{-\overline{\lambda}-\varkappa}^+\right)$ и $\left(\pi_\lambda^-,\, \pi_{-\overline{\lambda}-\varkappa}^-\right)$:

$$\left(\pi_\lambda^\pm(g)\psi,\, \varphi\right)_S = \left(\psi,\, \pi_{-\overline{\lambda}-\varkappa}^\pm(g^{-1})\varphi\right)_S, \tag{3.3}$$

где берутся либо верхние, либо нижние знаки $\pm$. Поэтому для $\operatorname{Re}\lambda = -\varkappa/2$ представления $\pi_\lambda^\pm$ унитаризуемы, и мы получаем *непрерывную* серию унитарных представлений.

Для λ общего положения представления $\pi_\lambda^\pm$ неприводимы, приводимость имеет место только для вещественных λ, удовлетворяющих некоторым условиям целочисленности. Следовательно, представления непрерывной серии неприводимы для $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$.

Определим на $\mathcal{D}(S)$ оператор A_λ:

$$(A_\lambda\varphi)(s) = \int_S \|s,\, t\|^{-\lambda-\varkappa}\, \varphi(t)\, dt, \tag{3.4}$$

Интеграл сходится при $\operatorname{Re}\lambda < -\varkappa + 1$ и распространяется по аналитичности на всю плоскость λ до мероморфной функции. Этот оператор сплетает $\pi_\lambda^\pm$ с $\pi_{-\lambda-\varkappa}^\mp$:

$$A_\lambda \pi_\lambda^\pm(g) = \pi_{-\lambda-\varkappa}^\mp(g) A_\lambda, \tag{3.5}$$

где берутся верхние или нижние знаки $\pm$. С формой (2.1) он взаимодействует так:

$$(A_\lambda\psi,\, \varphi)_S = (\psi,\, A_{\overline{\lambda}}\varphi)_S. \tag{3.6}$$

Далее,

$$A_{-\lambda-\varkappa}A_\lambda = \frac{1}{c(\lambda)}\, E, \tag{3.7}$$

где E – тождественный оператор и $c(\lambda)$ – некоторая мероморфная функция.

Кроме эрмитовой формы $(A_\lambda\psi,\, \varphi)_S$, рассмотрим еще *билинейную* форму $L_\lambda(\psi, \varphi)$ на $\mathcal{D}(S)$:

$$L_\lambda(\psi, \varphi) = (A_\lambda\psi,\, \overline{\varphi})_S = \int_S \|s,\, t\|^{-\lambda-\varkappa}\, \psi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt. \tag{3.8}$$

Распространим представления $\pi_\lambda^\pm$ и оператор A_λ на пространство $\mathcal{D}'(S)$ обобщенных функций на S – с помощью формул (3.3) и (3.6).

Для изучения представлений $\pi_\lambda^\pm$ полезно использовать их K-типы. Приведем некоторые факты.

Ограничение любого представления $\pi_\lambda^\pm$ на группу K есть квазирегулярное представление R этой группы на S:

$$(R(k)\varphi)(s) = \varphi(sk), \quad \varphi \in \mathcal{D}(S), \quad k \in K.$$

Поскольку S – компактное симметрическое пространство, R распадается в прямую однократную сумму неприводимых представлений ρ_μ группы K со старшими весами μ, действующими на подпространствах $V_\mu \subset \mathcal{D}(S)$. Эти подпространства – собственные для оператора A_λ с собственными числами $a(\lambda, \mu)$. Мы имеем $a(\lambda,\mu)a(-\lambda-\varkappa,\mu) = 1/c(\lambda)$, так что $c(\lambda)$ инвариантна относительно $\lambda \mapsto -\lambda - \varkappa$.

Напишем для $a(\lambda, \mu)$ интегральное представление. Возьмем $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, X_i, Y_i – как в § 1. Для $u = (u_1, \ldots, u_r)$ положим $X(u) = \sum u_i X_i$, $Y(u) = \sum u_i Y_i$. Группа $B = \exp \mathfrak{b}$ есть подгруппа в K, поэтому компактна. Введем в B координаты u с помощью отображения $u \mapsto \exp Y(u)$. Пусть Σ^+ – система положительных корней пары $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$, обозначим через r_α кратность корня α. Возьмем в V_μ сферическую функцию ψ_μ, инвариантную относительно $K \cap H$, нормированную условием $\psi_\mu(s^0) = 1$. Тогда по (2.4), (2.23) и [7] мы получаем

$$a(\lambda,\mu) = C \int_S \prod_{i=1}^r |\cos u_i|^{-\lambda-\varkappa} \prod_{\alpha\in\Sigma^+} |\sin \alpha(X(u))|^{r_\alpha}\, \psi_\mu(s^0 \exp Y(u))\, du,$$

где $du = du_1 \ldots du_r$ и C – постоянная, не зависящая от λ и μ.

При иследовании неприводимости решающую роль играет оператор $\pi_\lambda^+(Z_0)$ (оператор $\pi_\lambda^-(Z_0)$ отличается только знаком). Достаточно проследить, как этот оператор действует на сферические функции ψ_μ. Его $K \cap H$-радиальная часть D_λ есть дифференциальный оператор по переменным $u_1, \ldots, u_r$. Вот его явное выражение:

$$D_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sin 2u_i \frac{\partial}{\partial u_i} - \lambda \left(\sum_{i=1}^r \cos 2u_i - r + \frac{2m}{\varkappa} \right),$$

где, напомним, $2m = \dim G/H$.

§ 4. Переполненные системы и символы

В этом параграфе мы даем основные конструкции квантования в духе Березина на *пара-эрмитовых* симметрических пространствах G/H. Условия $(a)-(d)$ из § 1 нужно несколько изменить: например, надо опустить множитель i в (1.2), вместо комплексного сопряжения надо взять некоторую перестановку аргументов, наконец, мы отказываемся от гильбертовой структуры в пространствах представлений.

Координатам z и $\overline{z}$ в G/K аналогичны орисферические координаты ξ и η (или s и t) в G/H. Роль пространства Фока играет некоторое пространство функций $\varphi(s)$ от одной из этих координат, например, пространство $\mathcal{D}(S)$. Как и в § 1, алгебры $\mathcal{A}_h$ появляются как алгебры ковариантных символов операторов, действующих на эти функции. В качестве переполненной системы мы берем ядро сплетающего оператора из § 3, т. е. функцию

$$\Phi(s,t) = \Phi_\lambda(s,t) = \|s,t\|^\lambda.$$

Она обладает воспроизводящим свойством, это формула (3.7), переписанная в другом виде:

$$\varphi(s) = c(\lambda) \int_{S\times S} \frac{\Phi(s,v)}{\Phi(u,v)}\, \varphi(u)\, dx(u,v). \tag{4.1}$$

Пусть $\widehat{A}$ – некоторый оператор, действующий на функциях на S. Определим *ковариантный символ* $A(s,t)$ оператора $\widehat{A}$ следующим образом:

$$A(s,t) = \frac{(\widehat{A}\otimes 1)\Phi(s,t)}{\Phi(s,t)}.$$

Мы можем рассматривать его как функцию $A(x)$ на G/H, используя (2.14). Оператор восстанавливается по своему символу:

$$\left(\widehat{A}\varphi\right)(s) = c(\lambda) \int_{S\times S} A(s,v)\, \frac{\Phi(s,v)}{\Phi(u,v)}\, \varphi(u)\, dx(u,v). \tag{4.2}$$

Символ единичного оператора есть тождественная единица на G/H. Умножение операторов $\widehat{A}_1\widehat{A}_2$ дает умножение $A_1 * A_2$ символов:

$$\left(A_1 * A_2\right)(s,t) = \int_{S\times S} A_1(s,v)A_2(u,t)\, \mathcal{B}(s,t;u,v)\, dx(u,v), \tag{4.3}$$

где

$$\mathcal{B}(s,t;u,v) = c(\lambda)\frac{\Phi(s,v)\Phi(u,t)}{\Phi(s,t)\Phi(u,v)}\ .$$

Назовем функцию $\mathcal{B}(s,t;u,v)$ *ядром Березина.*

С другой стороны, пусть $F(s,t)$ – функция на $S\times S$. Она порождает оператор $\widehat{A}$ формулой:

$$\left(\widehat{A}\varphi\right)(s) = c(\lambda) \int_{S\times S} F(u,v)\, \frac{\Phi(s,v)}{\Phi(u,v)}\, \varphi(u)\, dx(u,v). \tag{4.4}$$

Назовем функцию $F(s,t)$ *контравариантным* символом оператора $\widehat{A}$. Формула (4.4) отличается от (4.2) только первым аргументом у символа. Этот оператор является оператором типа Теплица. В самом деле, отображение $P: f \mapsto \varphi$, определяемое формулой

$$\varphi(s) = c(\lambda) \int_{S\times S} f(u,v)\, \frac{\Phi(s,v)}{\Phi(u,v)}\, dx(u,v), \tag{4.5}$$

переводит $\mathcal{D}(S\times S)$ в $\mathcal{D}(S)$ и, в силу (4.1), является проектированием. Формула (4.4) означает, что $\widehat{A}\varphi = P(F\varphi)$.

Мы получаем цепочку соответствий: $F \mapsto \widehat{A} \mapsto A$. Назовем их композицию $\mathcal{B}$ *преобразованием Березина.* Оно переводит контравариантные символы в ковариантные и задается тем же самым ядром Березина, что и умножение (4.3):

$$A(s,t) = \int_{S\times S} \mathcal{B}(s,t;u,v)\,F(u,v)\,dx(u,v).$$

Таким образом, мы получили метод для построения ассоциативных алгебр $\mathcal{A}_h$: они состоят из ковариантных символов $A(s,t) = A(x)$ операторов из некоторого класса (алгебры), умножение $*$ в $\mathcal{A}_h$ дается (4.3). Соответствие $A \mapsto \widehat{A}$ есть представление элементов алгебры $\mathcal{A}_h$ операторами. В качестве постоянной Планка мы берем $h = -1/\lambda$ (при надлежащих нормировках мер).

В частности, если в качестве алгебры операторов взять алгебру, состоящую из операторов $\pi_\lambda^-(X)$, где X пробегает универсальную обертывающую алгебру Env$\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то получается *полиномиальное квантование*, см. [6].

Для оператора $\widehat{A}$ обозначим через $\widehat{A}'$ оператор, сопряженный относительно формы (3.8): $L_\lambda(\widehat{A}\psi,\varphi) = L_\lambda(\psi,\widehat{A}'\varphi)$. Ковариантные символы этих операторов связаны перестановкой аргументов: $A'(s,t) = A(t,s)$. Отображение $A \mapsto A'$ меняет порядок множителей: $(A_1 * A_2)' = A_2' * A_1'$, так что оно является антиинволюцией для всякой алгебры $\mathcal{A}_h$.

В силу (2.14) ядро Березина можно рассматривать как функцию $\mathcal{B}(x,y)$ на $G/H \times G/H$. В орисферических координатах ξ,η ядро Березина выражается через функцию (2.17):

$$\mathcal{B}(x;y) = c(\lambda)\left|\frac{b(\xi,\beta)b(\alpha,\eta)}{b(\xi,\eta)b(\alpha,\beta)}\right|^{-\lambda/\varkappa},$$

где $(\xi,\eta)\mapsto x$, $(\alpha,\beta)\mapsto y$ согласно (2.7). В частности, (напомним, что $x^0 = He$ есть базисная точка в G/H):

$$\mathcal{B}(x;x^0) = c(\lambda)|b(\xi,\eta)|^{\lambda/\varkappa}.$$

Ядро сплетающего оператора зависит от реализации представлений. Если мы используем переменные ξ,η, то мы должны взять функцию $\Phi(\xi,\eta) = |b(\xi,\eta)|^{-\lambda/\varkappa}$ – в полной аналогии с эрмитовым случаем.

§ 5. Тензорные произведения

Тензорное произведение

$$R_\lambda = \pi^-_{-\lambda-\varkappa} \otimes \pi^+_{-\lambda-\varkappa},$$

действующее на $\mathcal{D}(S \times S)$, обладает следующей инвариантной полуторалинейной формой:

$$(\varphi_1, \varphi_2)_\lambda = c(\lambda) \int \varphi_1(s,t)\, \overline{\varphi_2(u,v)}\, (\|s,v\| \cdot \|u,t\|)^\lambda \, ds\, dt\, du\, dv. \tag{5.1}$$

Оператор Q_λ в $\mathcal{D}(S \times S)$ с тем же самым ядром, т. е.

$$(Q_\lambda \varphi)(s,t) = c(\lambda) \int \varphi(u,v)\, (\|s,v\| \cdot \|u,t\|)^\lambda \, du\, dv,$$

сплетает R_λ с $R_{-\lambda-\varkappa}$.

Представление R_λ группы G на $\mathcal{D}(S \times S)$ вместе с формой (5.1) есть *каноническое представление*, см. [5]. Надгруппой служит прямое произведение $G \times G$, форма (5.1) является формой Березина.

Ограничим представление R_λ на пространство $\mathcal{D}(\Omega)$, см. § 2. Отображение $\varphi \mapsto f$, определенное на $\mathcal{D}(\Omega)$ формулой

$$f(s,t) = \varphi(s,t)\|s,t\|^{\lambda+\varkappa},$$

переводит представление R_λ в представление U сдвигами, см. (2.11), (2.12), в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$(U(g)f)\,(s,t) = f(\widetilde{s}, \widehat{t}),$$

форму (5.1) – в форму с ядром Березина (форму Березина)

$$E_\lambda(f,h) = \int f(s,t)\, \overline{h(u,v)}\, \mathcal{B}(s,t;u,v)\, dx(s,t)\, dx(u,v), \tag{5.2}$$

а оператор Q_λ – в преобразование Березина, или, в терминах G/H:

$$\begin{aligned} (U(g)f)\,(x) &= f(xg), \\ E_\lambda(f,h) &= \int \mathcal{B}(x;y)\, f(x)\, \overline{h(y)}\, dx\, dy, \\ (\mathcal{B}f)(x) &= \int_{G/H} \mathcal{B}(x;y)\, f(y)\, dy. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Поэтому назовем оператор Q_λ тоже *преобразованием Березина.*

Мы можем рассматривать функцию $\mathcal{B}(x;x^0)$ как H-инвариантную обобщенную функцию на G/H. Предположим, что нам удалось разложить ее по сферическим функциям (H-инвариантным обобщенным функциям) на G/H. Это эквивалентно формуле Планшереля для формы Березина, и это дает нам возможность выразить преобразование Березина через операторы Лапласа $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$. Отсюда мы находим асимптотику преобразования Березина при $\lambda \to -\infty$. Это позволяет нам сказать, где (на каких сериях и т. д.) имеет место принцип соответствия.

Сам принцип соответствия заключается в двух предельных соотношениях: пусть $\lambda \to -\infty$, тогда

$$A_1 * A_2 \;\to\; A_1 A_2; \tag{5.4}$$

$$-\lambda\,(A_1 * A_2 - A_2 * A_1) \;\to\; \{A_1, A_2\}; \tag{5.5}$$

как уже сказано, отличие от (1.1) и (1.2) – отсутствие во втором соотношении мнимой единицы i. Этот принцип равносилен асимптотическому соотношению

$$\mathcal{B} \sim 1 - \frac{1}{\lambda}\Delta, \tag{5.6}$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами.

§ 6. Пример

Рассмотрим пара-эрмитово симметрическое пространство G/H, где $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $H = \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R})$, $n \geqslant 3$. Оно имеет размерность $2n-2$, ранг $r=1$ и род $\varkappa = n$. Его можно реализовать как G-орбиту в алгебре Ли относительно присоединенного представления, однако нам сейчас будет удобнее использовать слегка измененную реализацию.

Пусть x^0 есть следующая матрица $n \times n$, записанная в блочном виде относительно разбиения $n = (n-1)+1$:

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18.1}$$

Тогда G/H есть G-орбита в $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ точки x^0 относительно действия $x \mapsto g^{-1}xg$. Это многообразие есть множество матриц, ранг и след которых равны 1. Стационарная подгруппа H точки x^0 состоит из матриц $\mathrm{diag}\{a,b\}$, где $a \in \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R})$, $b = (\det a)^{-1}$.

Подалгебры $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$ состоят соответственно из матриц

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где ξ есть строка $(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$, а η есть столбец $(\eta_1,\ldots,\eta_{n-1})$ из $\mathbb{R}^{n-1}$. Вложение (2.7) есть

$$x = \frac{1}{N(\xi,\eta)}\begin{pmatrix} -\eta\xi & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad N(\xi,\eta) = 1 - \xi\eta.$$

Инвариантная метрика ds^2 на пространстве G/H с точностью до множителя есть $\mathrm{tr}\,(dx^2)$. Она порождает меру dx, оператор Лапласа–Бельтрами Δ, симплектическую форму ω и скобку Пуассона $\{f,h\}$. В координатах ξ,η имеем:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -2N(\xi,\eta)^{-2}\Big\{\sum \xi_i\, d\eta_i \sum \eta_i d\xi_i + N(\xi,\eta)\sum d\xi_i\, d\eta_i\Big\}.\\
dx &= |N(\xi,\eta)|^{-n}\, d\xi\, d\eta \quad (d\xi = d\xi_1 ... d\xi_{n-1}),\\
\Delta &= N(\xi,\eta)\sum(\delta_{ij} - \xi_i\eta_j)\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\,\partial\eta_j}\\
\omega &= \frac{1}{N(\xi,\eta)}\sum\left(\delta_{ij} + \frac{1}{N(\xi,\eta)}\eta_i\,\xi_j\right) d\xi_i \wedge d\eta_j,\\
\{f,h\} &= N(\xi,\eta)\sum(\delta_{ij} - \xi_i\eta_j)\left(\frac{\partial f}{\partial\eta_i}\frac{\partial h}{\partial\xi_j} - \frac{\partial f}{\partial\xi_i}\frac{\partial h}{\partial\eta_j}\right).
\end{aligned}$$

Возьмем в $\mathbb{R}^n$ евклидово скалярное прозведение $\langle x,y\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ и норму $|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Многообразие S есть единичная сфера $S^{n-1}: |x|=1$ с диаметрально противоположными точками, т. е. $(n-1)$-мерное проективное пространство. Мы имеем $\|s,t\| = |\langle s,t\rangle|$, так что $\Phi(s,t) = |\langle s,t\rangle|^\lambda$. Многообразие $\Omega = G/H$ и его граница даются условиями $\langle s,t\rangle \neq 0$ и $\langle s,t\rangle = 0$, соответственно. Матрица $x\in G/H$ с координатами s,t дается формулой $x = t's/\langle s,t\rangle$, штрих означает транспонирование. Ядро Березина в терминах матриц есть

$$\mathcal{B}(x,y) = c(\lambda)|\mathrm{tr}(xy)|^\lambda,$$

где

$$c(\lambda) = \left\{2^{n+1}\pi^{n-2}\Gamma(-\lambda-n+1)\Gamma(\lambda+1)\left[\cos\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right]\right\}^{-1}.$$

Квазирегулярное представление U группы G на G/H разлагается по неприводимым унитарным представлениям двух серий: представлений непрерывной серии $T_{\sigma,\varepsilon}$, $\sigma = (-n+1)/2 + i\rho$, $\rho\in\mathbb{R}$, $\varepsilon = 0,1$, и дискретной серии $T_{\sigma(m)}$, $\sigma(m) = (-n+2)/2+m$, $m=0,1,2,...$; все с кратностью 1, см. [4], [8], [9]. Напишем выражения формы Березина для $\mathrm{Re}\,\lambda < (-n+1)/2$ через оператор Δ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \frac{\Gamma(-\lambda+\sigma)\,\Gamma(-\lambda-\sigma-n+1)}{\Gamma(-\lambda)\,\Gamma(-\lambda-n+1)}\cdot\frac{\cos\lambda\pi + (-1)^\varepsilon\cos\sigma\pi}{\cos\lambda\pi+1},\\
\mathcal{B} &= \frac{\Gamma(-\lambda+\sigma)\,\Gamma(-\lambda-\sigma-n+1)}{\Gamma(-\lambda)\,\Gamma(-\lambda-n+1)}\cdot\frac{\sin\lambda\pi + (-1)^\varepsilon\sin\sigma\pi}{\sin\lambda\pi+1}
\end{aligned}$$

соответственно для нечетного и четного n. Правые части нужно рассматривать как функции от $\Delta = \sigma(\sigma+n-1)$. В обоих случаях первая дробь ведет себя при $\lambda\to-\infty$ как $1-\lambda^{-1}\Delta$. Это как раз то, что нам нужно для принципа соответствия. Во вторых дробях слагаемое с $(-1)^\varepsilon$ исчезает на дискретном спектре для четного n. Таким образом, принцип соответствия справедлив на дискретном спектре для четного n.

Каноническое представление R_λ, действующее в $\mathcal{D}(S\times S)$, исследуется аналогично [5]: для λ из полосы $(-n-1)/2 < \mathrm{Re}\,\lambda < (-n+1)/2$ оно разлагается подобно квазирегулярному представлению, при движении λ из этой полосы направо или налево добавляются дополнительные слагаемые, входящие в граничные представления.

Литература

1. Ф. А. Березин. Квантование. Изв. АН СССР, сер. матем., 1974, 38, № 5, 1116–1175.

2. Ф. А. Березин. Квантование в комплексных симметрических пространствах. Изв. АН СССР, сер. матем., 1975, том 39, № 2, 363–402.

3. Ф. А. Березин. Связь между ко– и контравариантными символами операторов в комплексных симметрических областях. Докл. АН СССР, 1978, том 19, № 1, 15–17.

4. В. Ф. Молчанов. Формула Планшереля для касательного расслоения проективного пространства. Докл. АН СССР, 1981, том 260, № 5, 1067–1070.

5. В. Ф. Молчанов, А. А. Артемов, Л. И. Грошева. Канонические и граничные представления (см. настоящий том).

6. В. Ф. Молчанов, Н. Б. Волотова, О. В. Гришина, С. В. Цыкина. Полиномиальное квантование (см. настоящий том).

7. С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

8. G. van Dijk, V. F. Molchanov. The Berezin form for rank one para-Hermitian symmetric spaces, J. Math. Pures Appl., 1998, t. 77, No. 8, 747–799.

9. G. van Dijk, V. F. Molchanov. Tensor products of maximal degenerate series representations of the group $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. J. Math. Pures Appl., 1999, t. 78, No. 1, 99–119.

10. S. Kaneyuki. On orbit structure of compactifications of parahermitian symmetric spaces. Japan. J. Math., 1987, 13, No. 2, 333–370.

11. S. Kaneyuki, M. Kozai. Paracomplex structures and affine symmetric spaces. Tokyo J. Math., 1985, vol. 8, 81–98.

12. O. Loos. Jordan Pairs. Lect. Notes Math., 1975, 460.

13. V. F. Molchanov. Quantization on para-Hermitian symmetric spaces, Amer. Math. Soc. Transl, Ser. 2, vol. 175 (Adv. in the Math. Sci.–31), 1996, 81–95.

14. A. Unterberger, H. Upmeier. Berezin transform and invariant differential operators. Comm. Math. Phys., 1994, vol. 164, 563–598.

Поступила в редакцию 25 апреля 2009 г.

V.F. Molchanov. Quantization on para-Hermitian symmetric spaces.

Quantization (symbol calculus) in the spirit of Berezin on para-Hermitian symmetric spaces is constructed.

Keywords: representations of Lie groups, Hermitian symmetric spaces, para-Hermitian symmetric spaces, symbol calculi