УДК 517.98

Гармонический анализ на плоскости дуального переменного [1]

© Ю. В. Дунин

Ключевые слова: дуальные числа, представления, формула Планшереля.

Квазирегулярное представление группы $\mathrm{SU}(2, \mathbf{\Lambda})$ ($\mathbf{\Lambda}$ – алгебра дуальных чисел), действующей дробно-линейно на $\mathbf{\Lambda}$, разлагается на неприводимые унитарные составляющие.

Пусть $\mathbf{\Lambda}$ – алгебра дуальных чисел $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = 0$. Сопряженное число для z есть $\overline{z} = x - iy$. Группа $G = \mathrm{SU}(2; \mathbf{\Lambda})$ состоит из матриц

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad a\overline{a} + b\overline{b} = 1.$$

Она действует на $\mathbf{\Lambda}$ дробно-линейно:

$$z \mapsto \widetilde{z} = z \cdot g = \frac{az - \overline{b}}{bz + \overline{a}}. \tag{1}$$

Пусть $a = \alpha + ip$, $b = \beta + iq$. Тогда $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Поэтому мы можем ввести параметр t: $\alpha = \cos(t/2)$, $\beta = \sin(t/2)$. Группа G накрывает группу $M(2)$ движений евклидовой плоскости с кратностью два (например, с помощью действия $h \mapsto \overline{g}'hg$ на пространстве "эрмитовых" над $\mathbf{\Lambda}$ матриц h): элементу g отвечает матрица

$$A_g = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & a_1 \\ \sin t & \cos t & a_2 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

где $a_1 = 2(\alpha q - \beta p)$, $a_2 = 2(\alpha p + \beta q)$. Разделим в (1) вещественные и мнимые части:

$$\widetilde{x} = \frac{\alpha x - \beta}{\beta x + \alpha}, \quad \widetilde{y} = \frac{y + [-(a_1/2)(x^2 - 1) + a_2 x]}{(\beta x + \alpha)^2}.$$

Мы видим, что функция (1) определена на всей плоскости $\mathbf{\Lambda}$ при $\beta = 0$, и на всей плоскости $\mathbf{\Lambda}$, кроме вертикальной прямой $x = -\alpha/\beta$, при $\beta \neq 0$. Мера

$$d\mu(z) = \frac{dx\, dy}{(1 + x^2)^2}, \quad z = x + iy,$$

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 1.1.2/1474 и Темпланом 1.5.07.

инвариантна относительно (1). Поэтому представление U группы G сдвигами в пространстве $L^2(\mathbf{\Lambda}, d\mu)$ комплексных функций:

$$(U(g)f)(z) = f(z \cdot g)$$

унитарно. Мы хотим разложить его на неприводимые составляющие.

Пусть $f \in L^2(\mathbf{\Lambda}, d\mu)$. Рассмотрим ее преобразование Фурье по y:

$$\widehat{f}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, \mathrm{e}^{-ity}\, dy, \quad z = x + iy,$$

В этих функциях оператор $U(g)$ превращается в оператор $\widehat{U}(g)$:

$$\left(\widehat{U}(g)\widehat{f}\right)(x,t) = (\beta x + \alpha)^2 \exp(itD) \cdot \widehat{f}\left(\widetilde{x}, (\beta x + \alpha)^2 t\right),$$

где

$$D = -\frac{1}{2}\, a_1\, (x^2 - 1) + a_2\, x.$$

Теперь перейдем от функций $\widehat{f}$ к функциям

$$\varphi_s(x) = \frac{\widehat{f}(x,t)}{1 + x^2}, \quad 2s = (1 + x^2)t.$$

Тогда оператор $\widehat{U}(g)$ перейдет в оператор $U'(g)$:

$$\left(U'(g)\varphi_s\right)(x) = \exp \frac{2isD}{1 + x^2} \cdot \varphi_s(\widetilde{x}). \tag{2}$$

Наконец, перейдем от x к θ по формуле $x = \mathrm{tg}(\theta/2)$. Тогда функция $\varphi_s(x)$ превратится в функцию $\varphi_s(\theta)$ на единичной окружности $S = \{\exp(i\theta)\}$, а формула (2) примет вид (параметр t введен выше)

$$\left(U'(g)\varphi_s\right)(\theta) = \exp\left\{is(a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta)\right\} \cdot \varphi_s(\theta - t). \tag{3}$$

Функция f восстанавливается по функциям φ_s следующим образом:

$$f(z) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s(\theta) \mathrm{e}^{isy(1+\cos\theta)}\, ds, \quad x = \mathrm{tg}\,(\theta/2). \tag{4}$$

Скалярный квадрат в $L^2(\mathbf{\Lambda}, d\mu)$ раскладывается по скалярным квадратам в $L^2(S, d\theta)$:

$$\int_{\mathbf{\Lambda}} |f(z)|^2\, d\mu(z) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_s(\theta)|^2\, d\theta. \tag{5}$$

С другой стороны, как известно [1], все неприводимые унитарные представления T_s, $s \in \mathbb{R}$, группы $M(2)$ действуют в $L^2(S, d\theta)$ по формуле

$$\left(T_s(A_g)\varphi_s\right)(\theta) = \exp\left\{is(a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta)\right\} \cdot \varphi_s(\theta - t). \tag{6}$$

Мы видим, что правые части (3) и (6) совпадают. Итак, мы получили теорему.

Теорема 1 *Сопоставим функции $f \in L^2(\mathbf{\Lambda}, d\mu)$ совокупность функций $\varphi_s(\theta)$, $s \in \mathbb{R}$, на единичной окружности S следующим образом:*

$$\varphi_s(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, \mathrm{e}^{-isy(1+\cos\theta)}\, dy.$$

Это соответствие G-эквивариантно: если функция f преобразуется по представлению U, то функции φ_s преобразуются по неприводимым унитарным представлениям T_s. Имеет место формула обращения (4) *и формула Планшереля* (5).

Литература

1. Н. Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений. М.: Наука, 1965.

Yu. V. Dunin. Harmonic analysis on the plane of dual numbers. The quasiregular representation of the group $\mathrm{SU}(2, \mathbf{\Lambda})$ (over the algebra $\mathbf{\Lambda}$ of dual numbers), acting on $\mathbf{\Lambda}$ fractional linearly, is decomposed into unitary irreducible components.
Keywords: dual numbers, representations, Plancherel formula.

Поступила в редакцию 23 ноября 2009 г.

УДК 519.1

Один из вариантов преобразования Радона в $\mathbb{Z}^n$ [1]

© С. В. Кольцова

Ключевые слова: конечные множества, преобразование Радона, формула обращения.

Найдена формула обращения для одной задачи Радона на $\mathbb{Z}^n$.

Пусть X – произвольное множество, $\mathfrak{A}$ – набор конечных подмножеств $A \subset X$, $L(X)$ – пространство функций f на X. Сопоставим функции f функцию φ на $\mathfrak{A}$ по следующему правилу

$$f(x) \mapsto \varphi(A) = \sum_{x \in A} f(x). \tag{1}$$

Аналог задачи Радона – восстановить, если возможно, функцию f, зная функцию φ. Назовём множество $\mathfrak{A}$ полным, если существует формула обращения, восстанавливающая функцию f через функцию φ.

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 1.1.2/1474 и Темпланом 1.5.07.