УДК 517.922, 517.929, 517.988.5

НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

© **Е.С. Жуковский, Е.А. Плужникова**

Ключевые слова: накрывающие отображения метрических пространств; корректная разрешимость систем операторных уравнений; обыкновенные дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной; корректная разрешимость краевой задачи.

Получены условия непрерывной зависимости от параметров решений систем операторных уравнений в метрических пространствах. Доказанные утверждения применяются к исследованию корректной разрешимости краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной.

Результаты изучения накрывающих отображений метрических пространств, полученные в [1] и ряде статей, последовавших за этой публикацией, нашли приложения в теории дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. В [2], [3] найдены условия существования решений задачи Коши и их непрерывной зависимости от параметров. Для нахождения условий разрешимости краевых задач в работе [4] рассмотрены накрывающие отображения в произведении метрических пространств. В данной статье продолжены эти исследования: сформулированы условия корректности систем операторных уравнений в метрических пространствах, полученные результаты применены к доказательству утверждений о непрерывной зависимости от параметров решений краевых задач.

Будем обозначать: ρ_X — метрику пространсва X, $B_X(x,r)$ — замкнутый шар с центром в точке x радиуса $r>0$ в пространстве X.

О п р е д е л е н и е 1 [1. с. 151]. Пусть задано число $\alpha>0$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *α-накрывающим* (*накрывающим*), если для любого $r>0$ и любого $x \in X$ имеет место включение

$$\Psi\big(B_X(x,r)\big) \supseteq B_Y\big(\Psi(x),\alpha r\big).$$

Пусть заданы метрические пространства (X_i,ρ_{X_i}), (Y_i,ρ_{Y_i}), $i=\overline{1,n}$. Определим в пространствах $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ и $Y=Y_1\times Y_2\times\ldots\times Y_n$ метрики равенствами $\rho_X=\big|(\rho_{X_1},\rho_{X_2},\ldots,\rho_{X_n})\big|$ и $\rho_Y=\big|(\rho_{Y_1},\rho_{Y_2},\ldots,\rho_{Y_n})\big|$.

Пусть, далее, заданы отображения $F_{j\,i} : X_j\times X\to Y_j$, $j=\overline{1,n}$, $i=1,2,\ldots,$ и элемент $y^0=(y_1^0,y_2^0,\ldots,y_n^0)\in Y$. Рассмотрим последовательность систем операторных уравнений

$$\begin{cases} F_{1i}(x_1,x_1,x_2,\ldots,x_n)=y_1^0,\\ F_{2i}(x_2,x_1,x_2,\ldots,x_n)=y_2^0,\\ \quad\vdots\\ F_{ni}(x_n,x_1,x_2,\ldots,x_n)=y_n^0, \end{cases} \qquad i=1,2,\ldots, \tag{1}$$

относительно неизвестного $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X$. Определим отображения

$$\Phi_i : X\times X\to Y,\quad \Phi_i(v,x)=\big(F_{j\,i}(v_j,x)\big)_{j=\overline{1,n}},\quad i=1,2,\ldots.$$

Тогда систему (1) можем записать в виде уравнения

$$\Phi_i(x,x)=y^0,\quad i=1,2,\ldots. \tag{2}$$

Предположим, что для некоторого элемента $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0) \in X$ имеет место сходимость

$$\Phi_i(u^0, u^0) = \begin{pmatrix} F_{1i}(u_1^0, u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0) \\ F_{2i}(u_2^0, u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0) \\ \vdots \\ F_{ni}(u_n^0, u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0) \end{pmatrix} \to y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Нас интересуют условия, обеспечивающие разрешимость при любом натуральном i системы уравнений (1), и сходимость к u^0 последовательности ее решений. Рассматриваемую задачу можно трактовать как корректность некоторого операторного уравнения

$$\Phi(x, x) = y^0,$$

такого что $\Phi_i(u^0, u^0) \to \Phi(u^0, u^0)$.

Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Пусть пространства* X_j, $j = \overline{1, n}$, *являются полными. Пусть для каждых* $j, l = \overline{1, n}$ *существуют такие числа* $\alpha_j > 0$, $\beta_{j\,l} \geqslant 0$, *что спектральный радиус матрицы* $(\alpha_j^{-1}\beta_{j\,l})_{n\times n}$ *меньше* 1, *и при любом натуральном* i *выполнены условия:*
(a) *отображение* $F_{j\,i}(\,\cdot\,, x_1, x_2, \ldots, x_n) : X_j \to Y_j$ *является замкнутым и* α_j*-накрывающим при всех* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$*;*
(b) *отображение* $F_{j\,i}(v_j, x_1, \ldots, x_{l-1}, \cdot, x_{l+1}, \ldots, x_n) : X_l \to Y_j$ *является* $\beta_{j\,l}$*-липшицевым при любых* $v_j \in X_j$, $x_1 \in X_1, \ldots, x_{l-1} \in X_{l-1}$, $x_{l+1} \in X_{l+1}, \ldots, x_n \in X_n$.

Тогда, если имеет место соотношение (3), *то, начиная с некоторого номера, при каждом* i *существует такое решение* $\xi_i = (\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{ni}) \in X$ *системы уравнений* (1), *что* $\xi_i \to u^0$.

Данное утверждение применимо к исследованию корректной разрешимости краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции.

Пусть для всех $j = \overline{1, n}$, $i = 1, 2, \ldots$, заданы функции $f_{j\,i} : [a, b] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям Каратеодори (то есть являющиеся измеримыми по первому и непрерывными по совокупности оставшихся аргументов). Кроме того, предполагаем, что при каждом i для любого $\varrho > 0$ найдется такое число M_i, что при любых $\big(x_1, x_2, \ldots, x_n, y\big) \in \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющих неравенству $|y| + \sum_{j=1}^n |x_j| \leqslant \varrho$, имеет место $\big|f_i\big(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y\big)\big| \leqslant$ $\leqslant M_i$ при п.в. $t \in [a, b]$. Пусть, далее, заданы числа A_{ji}, B_{ji}, C_{ji}. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} f_{1i}\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \dot{x_1}(t)\big) = 0, \\ f_{2i}\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \dot{x_2}(t)\big) = 0, \\ \qquad\vdots \\ f_{ni}\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \dot{x_n}(t)\big) = 0, \end{cases} \quad t \in [a, b], \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} A_{1i}x_1(a) + B_{1i}x_1(b) + C_{1i} = 0, \\ A_{2i}x_2(a) + B_{2i}x_2(b) + C_{2i} = 0, \\ \qquad\vdots \\ A_{ni}x_n(a) + B_{ni}x_n(b) + C_{ni} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Решение этой задачи будем искать в классе $AC_\infty(\mathbb{R}^n)$ абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих существенно ограниченную производную.

Пусть для некоторой функции $u^0 \in AC_\infty(\mathbb{R}^n)$ при всех $j = \overline{1,n}$ имеют место соотношения:

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |f_{ji}\big(t, u_1^0(t), u_2^0(t), \ldots, u_n^0(t), \dot{u}_j^0(t)\big) \to 0, \quad A_{ji}u_j^0(a) + B_{ji}u_j^0(b) + C_{ji} \to 0 \ \text{ при } i \to \infty.$$

Пусть, далее, существуют $A_j = \lim_{i\to\infty} A_{ji}$, $B_j = \lim_{i\to\infty} B_{ji}$. И последнее: будем предполагать, что существуют такие числа $\alpha_j > 0$, $\beta_{j\,l} \geqslant 0$, $j, l = \overline{1,n}$, что для всех натуральных i при п.в. $t \in [a,b]$ выполнены условия:
(c) при всех $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ отображение $f_{ji}\big(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdot\big) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является α_j-накрывающим;
(d) отображение $f_{ji}\big(t, x_1, \ldots, x_{l-1}, \cdot, x_{l+1}, \ldots, x_n, y_j\big) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является $\beta_{j\,l}$-липшицевым при любых $x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n, y_j \in \mathbb{R}$.

Для применения к задаче (4), (5) теоремы 1 сделаем замену $y_l(t) = \dot{x}_l(t)$, $v_l = x_l(a)$, $l = \overline{1,n}$. В результате, вследствие равенства $x_l(t) = x_l(a) + \int_a^t \dot{x}_l(s)\,ds$, рассматриваемая краевая задача будет равносильна системе, включающей n операторных уравнений в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$ измеримых существенно ограниченных функций и еще n уравнений в $\mathbb{R}$, относительно неизвестных $(y_1, y_2, \ldots, y_n, v_l, v_2, \ldots, v_n) \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$. При этом, согласно результатам [2],[5], предположения (c),(d) обеспечат для соответствующих отображений выполнение условий (a),(b) теоремы 1.

Определим следующие $n\times n$ матрицы: 0 — нулевая матрица, $G = \operatorname{diag}\{(A_j + B_j)^{-1}B_j\}$, $H = (\alpha_j^{-1}\beta_{j\,l})$. Окончательно, если спектральный радиус матрицы $\left(\begin{array}{c|c} (b-a)H & H \\ \hline (b-a)G & 0 \end{array}\right)$ меньше 1, то начиная с некоторого номера, при каждом i существует такое решение $\xi_i = (\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{ni}) \in AC_\infty(\mathbb{R}^n)$ краевой задачи (4), (5), что $\sum_{j=1}^n \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |\xi_{ji}(t) - u_j^0(t)| \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

2. *Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. № 5. С. 613–634.

3. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11.

4. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений // Вестник ТГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1673–1674.

5. *Плужникова Е.А.* О накрывании оператора Немыцкого в пространстве суммируемых функций // Вестник ТГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1686–1687.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09–01–97503, № 11–01–00645) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Covering mapping and well-posedness of the boundary–value problem for differential equations unsolved for the derivative. There are derived the conditions of continuous dependence of solutions to system of operator equations in metric spaces on parameters. The statements proved are applied to study the well-posed solvability of the boundary-value problem for differential equations unsolved for the derivative.

Key words: conditionally covering operator in metrical spaces; well-posed solvability of systems of operator equations; ordinary differential equations unsolved for the derivative; well-posed solvability of the boundary-value problem.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru.

Плужникова Елена Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru.

УДК 517.962.24, 517.988

ПРИЛОЖЕНИЕ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЯМ

© С.Е. Жуковский

Ключевые слова: накрывающие отображения; разностные уравнения; устойчивое равновесие.

Теория накрывающих отображений применяется для изучения разностных уравнений. Получены достаточные условия существования положения равновесия и устойчивого положения равновесия разностных уравнений.

Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) — метрические пространства, заданы точки $u \in X$, $v \in Y$, число $\alpha > 0$ и отображение $f : X \times X \to Y$. Рассмотрим уравнение

$$f(x_{n+1}, x_n) = v \tag{1}$$

с начальным условием

$$x_0 = u. \tag{2}$$

Под решением задачи (1), (2) будем понимать последовательность $(x_0, x_1, x_2, ...)$, члены которой удовлетворяют равенству (1) при любом $n = 0, 1, 2, ...$ и начальному условию (2).

Будем говорить, что точка $x \in X$ является положением равновесия уравнения (1), если

$$f(x, x) = v.$$

Положение равновесия x назовем устойчивым, если для любого $u \in X$ задача (1), (2) имеет решение, и каждое решение задачи (1), (2) сходится к x.

Далее приводятся достаточные условия существования положения равновесия и устойчивого положения равновесия уравнения (1). Эти условия получены в терминах α-накрывающих отображений и являются следствием теоремы 1 из [1]. Используемое здесь понятие накрывания введено и изучено в [2–5].

О п р е д е л е н и е 1 [2]. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется α-накрывающим, если

$$B_Y(\Psi(x), \alpha r) \subset \Psi(B_X(x, r)) \ \ \forall x \in X, \ \ r \geqslant 0$$