*оптимальны; здесь*

$$FK_0(\xi)=\begin{cases}0, & 0\leqslant|\xi|\leqslant\sigma_0,\\ \dfrac{(T-\tau)\delta_T^2e^{|\xi|^\alpha(T-\tau)}}{(T-\tau)\delta_T^2e^{|\xi|^\alpha T}+\tau\delta_0^2e^{-|\xi|^\alpha T}}, & \sigma_0<|\xi|<\sigma_T,\\ e^{-|\xi|^\alpha\tau}, & |\xi|\geqslant\sigma_T,\end{cases}$$

$$FK_T(\xi)=\begin{cases}e^{|\xi|^\alpha(T-\tau)}, & 0\leqslant|\xi|\leqslant\sigma_0,\\ \dfrac{\tau\delta_0^2e^{-|\xi|^\alpha\tau}}{(T-\tau)\delta_T^2e^{|\xi|^\alpha T}+\tau\delta_0^2e^{-|\xi|^\alpha T}}, & \sigma_0<|\xi|<\sigma_T,\\ 0, & |\xi|\geqslant\sigma_T.\end{cases}$$

Поступила в редакцию 5 октября 2009 г.

Osipenko K. Yu. Extremal problems of interpolation type and optimal reconstruction of linear operators. Some methods of optimal reconstruction of linear operators are considered. Given scheme is applied to thermal conductivity equation.

Key words: optimal reconstruction of linear operators; interpolation; extremal problems; thermal conductivity equation.

УДК 515.12, 517.987

# К ТЕОРЕМЕ ДАУГАВЕТА

© П. М. Симонов, А. В. Чистяков

Ключевые слова: положительный оператор подстановки с весом; диффузный оператор; теорема Даугавета.

В статье сформулировано следующая теорема. Пусть $L^p = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $p \in [1, \infty]$, банахово пространство на сепарабельном пространстве с безатомной мерой. Тогда для любого положительного оператора подстановки с весом $S : L^p \to L^p$ канонический проектор $\mathcal{R}_S : \mathcal{M}(L^p) \to \mathcal{M}(L^p)$, порожденный полосой $\mathcal{R}_S := \{S\}^{dd}$, имеет единичную норму. Из теоремы сразу следует следующее утверждение. Если оператор $K \in \mathcal{M}(L^p)$ имеет мажоранту $V$, дизъюнктную с $S$ (например, $K$ — интегральный оператор), то $||S + K|| \geqslant ||S||$. Это утверждение значительно усиливает многочисленные обобщения известной теоремы И.К. Даугавета. Наиболее интересные применения анонсированная здесь теорема может иметь в спектральной теории операторных алгебр мажорированых операторов, порожденных решеточными гомоморфизмами.

Одной из первых публикаций по проблематике является работа [1], вызвавшая серию исследований [2–5]. К результатам подобного типа относится теорема Халмоша-Сандера ([6], теорема

8.6) о расстоянии между оператором умножения и интегральным оператором, действующими в $L^2[0,1]$, из которой, кстати говоря, следует теорема Диксмье о неинтегральности тождественного оператора [7] (см. также [6, с. 150]). Последние исследования по этой тематике, насколько нам известно, принадлежат Шамаеву [8].

Обозначим через $\mathcal{B}(L^p)$ пространство линейных непрерывных операторов, действующих в $L^p$. Линейное пространство всех мажорируемых операторов, действующих в $L^p$, обозначается как $\mathcal{M}(L^p)$. Обозначим через $\mathcal{L}(L^p)$ линейное пространство регулярных операторов, а через $\mathcal{L}_+(L^p)$ обозначим положительные операторы. Необходимые сведения из теории полуупорядоченных пространств и регулярных операторов имеются в главе X монографии [9]. Ниже мы пользуемся определением сепарабельного пространства, которое взято из книги ([10, с. 136]).

Т е о р е м а. *Пусть $S$ — положительный оператор подстановки с весом. Тогда при всех $p \in [1,\infty]$ $\mathcal{B}(L^p)$−норма канонического проектора*

$$\{S\}^{dd} : \mathcal{M}(L^p) \to \mathcal{M}(L^p)$$

*равна единице.*

Докажем предварительно две леммы.

Л е м м а 1. *Пусть*

$$S = (o)\sum_{i=1}^{\infty} S_i, \tag{1}$$

*где $S_i \in \mathcal{L}_+(L^p)$ для всех $i$. Тогда для каждого числа $\varepsilon = k^{-1} > 0$ найдутся целое число $m_k$ и измеримые множества $A_k$ и $B_k$ такие, что*

$$\max\{\mu(\Omega \setminus A_k)\} < k^{-1} \text{ и } ||\chi_{A_k} \sum_{i \geqslant m_k} S_i \chi_{B_k}||_{\mathcal{B}(L^p)} < k^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим оператор $S_i : L^p \to L^p$ и дуальный к нему оператор $S_i^{'} : L^{p'} \to L^{p'}$. По теореме найдется измеримое множество $C$ такое, что $\mu(\Omega \setminus C) < 2^{-1}k^{-1}$, а операторы $\chi_C S_i$ и $\chi_C S_i^{'}$ действуют в пространстве $L^\infty$. Ввиду положительности эти операторы ограничены:

$$||\chi_C S_i||_{\mathcal{B}(L^\infty)} < \infty \text{ и } ||\chi_C S_i^{'}||_{\mathcal{B}(L^\infty)} = ||S_i \chi_C||_{\mathcal{B}(L^1)} < \infty.$$

Так как $0 \leqslant \chi_C S_i \chi_C \leqslant \chi_C S_i \wedge S_i \chi_C S_i$, то оператор $S_i \chi_C = \chi_C S_i \wedge S_i \chi_C S_i$ действует в каждом из пространств $L^\infty$ и $L^1$. Из представления (1) следует

$$\sum_{i=1}^{m} (\chi_C S_i \wedge S_i \chi_C \mathbf{1})(\omega) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (S_i \mathbf{1})(\omega) \text{ п.в.},$$

откуда

$$\sum_{i>m} (\chi_C S_i \wedge S_i \chi_C \mathbf{1})(\omega) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ п.в.}.$$

Согласно теореме Егорова ([9, с. 58]) найдутся измеримое множество $D_k$ и целое число $n_k$ такие, что $\mu(\Omega \setminus D_k) < 2^{-1}k^{-1}$ и

$$||\chi_{D_k \cap C}[\sum_{i>m} S_i \chi_C]||_{\mathcal{B}(L^\infty)} = ||\sum_{i>m} \chi_{D_k \cap C} S_i \chi_C \mathbf{1}||_{L^\infty} < k^{-1} \tag{2}$$

при всех $m > n_k$.

Заменяя в этом рассуждении оператор $S_i \chi_C$ оператором $S_i^{'} \chi_C$, найдем измеримое множество $E_k$ и целое число $l_k$ такие, что $\mu(\Omega \setminus E_k) < 2^{-1}k^{-1}$ и

$$||\chi_C[\sum_{i>m} S_i \chi_{C \cap E_k}]||_{\mathcal{B}(L^1)} = ||\chi_{E_k \cap C}[\sum_{i>m} S_i^{'} \chi_C]||_{\mathcal{B}(L^\infty)} < k^{-1} \tag{3}$$

при всех $m > l_k$.

Полагаем $A_k = D_k \cap C$, $B_k = E_k \cap C$ и $m_k = \max\{l_k, n_k\}$. По построению

$$\mu(\Omega \setminus A_k) = \mu((\Omega \setminus D_k) \cup \mu(\Omega \setminus C_k)) \leqslant \mu(\Omega \setminus D_k) + \mu(\Omega \setminus C_k) < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

и, аналогично,

$$\mu(\Omega \setminus B_k) < \frac{1}{k}.$$

Из неравенства

$$\sum_{i>m} \chi_{A_k} S_i \chi_{B_k} \leqslant (\sum_{i>m} \chi_{A_k} S_i \chi_C) \wedge (\sum_{i>m} \chi_C S_i \chi_{B_k}),$$

учитывая (2) и (3), получаем, что

$$||\chi_{A_k}[\sum_{i>m} S_i]\chi_{B_k}]||_{\mathcal{B}(L^r)} \leqslant \min\{||\chi_{A_k}[\sum_{i>m} S_i]\chi_C]||_{\mathcal{B}(L^r)}, ||\chi_C[\sum_{i>m} S_i]\chi_{B_k}]||_{\mathcal{B}(L^r)}\} < \frac{1}{k}$$

при $r \in [1, \infty]$. Отсюда ввиду интерполяционной теоремы М. Рисса-Торина ([11, с. 37]) следует, что неравенство

$$||\chi_{A_k}(\sum_{i \geqslant m_k} S_i)\chi_{B_k}||_{\mathcal{B}(L^r)} < k^{-1}$$

верно при всех $r \in [1, \infty]$ (и, в частности, при $r = p$).

Л е м м а 2. *Пусть $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ — семейство попарно дизъюнктных положительных d-гомоморфизмов решетки $L^p$. Тогда найдутся семейство борелевских функций $a_i : \Omega \to \mathbb{R}_+$ и семейство борелевских отображений $\alpha_i : \Omega \to \Omega$ такие, что 1) при всех $i$ оператор $S_i$ имеет представление*

$$(S_i h)(\omega) = a_i(\omega) h(\alpha_i(\omega)), h \in L^p;$$

*2) $\alpha_i(\omega) \neq \alpha_j(\omega)$ при $i \neq j$ для всех $\omega \in \Omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положительный d-гомоморфизм $S_i$ допускает представление

$$(S_i h)(\omega) = a_i(\omega) h(\gamma_i(\omega)), h \in L^p,$$

где $a_i : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $\gamma_i : \Omega \to \Omega$ — борелевские отображения, причем в силу порядковой непрерывности оператора $S_i$ выполнено условие согласования: если $A \in \Sigma$ $\mu A = 0$, то $\mu((\gamma^{-1} A) \cap \{a_i(\omega) \neq \neq 0\}) = 0$.

Обозначим $A_i = \{a_i(\omega) \neq 0\}$. Из соотношения $S_i \wedge S_j = 0$ по теореме о представлении следует условие дизъюнктности

$$\mu\{\omega \in A_i \cap A_j : \gamma_j(\omega) = \gamma_i(\omega)\} = 0.$$

Выберем счетный набор $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ попарно различных точек из $\Omega$ и определим борелевские отображения равенством

$$\beta_i(\omega) = \begin{cases} \gamma_j(\omega), \ \omega \in A_i, \\ \omega_i, \ \omega \notin A_i \quad (i = 1, \dots). \end{cases}$$

Из условий согласования и дизъюнктности следует, что $\beta_i(\omega) \neq \beta_j(\omega)$ п.в. при $i \neq j$ . Таким образом, множество $A = \bigcup_{i \neq j} \{\omega \in \Omega : \beta_i(\omega) \neq \beta_j(\omega)\}$ имеет меру нуль. Заключению предложения удовлетворяет семейство борелевских отображений

$$\alpha_i(\omega) = \begin{cases} \beta_i(\omega), \ \omega \in \Omega \setminus A, \\ \omega_i, \ \omega \notin A \quad (i = 1, \dots). \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть $R \in \mathcal{M}(L^p)$. Представим мажоранту $|R| \in \mathcal{L}_+(L^p)$ в виде

$$|R| = (o)\sum_{i=0}^{\infty} S_i + V,$$

где $V$ — диффузный оператор [12], а при всех $i = 0, 1, \dots$ оператор $S_i$ есть положительный $d$-гомоморфизм. Будем предполагать, что

$S_0 \in \{S\}^{dd}$ и $S_i \in \{S\}^{dd}$ при всех $i \geqslant 1$, причем $S_i \wedge S_j$, если $i \neq j$.

Ввиду разложимости абстрактной нормы $|\cdot|$ существуют операторы $P_i \in \mathcal{M}(L^p)(i = 0, 1, \dots)$, $Q \in \mathcal{M}(L^p)$ такие, что

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} P_i + Q,$$

где $|P_i| = |S_i|$ и $|Q| = V$. Согласно определению канонического проектора

$$\{S\}^{dd} R = P_0.$$

В теореме утверждается, что

$$||P_0|| \geqslant ||R||. \tag{4}$$

Докажем это неравенство. В силу леммы 2 без ограничения общности можно предполагать, что при каждом $i = 0, 1, \dots$ оператор $S_i$ имеет представление

$$(S_i h)(\omega) = a_i(\omega) h(\alpha_i(\omega)), \;\; h \in L^p,$$

причем борелевские отображения $\alpha_i : \Omega \to \Omega$ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие дизъюнктности:

$$\alpha_i(\omega) \neq \alpha_j(\omega) \text{ при } i \neq j \text{ для всех } \omega \in \Omega. \tag{5}$$

Зафиксируем некоторое целое число $k \geqslant 1$ и найдем целое число $m_k$, компакт $A_k$ и измеримое множество $B_k$ такие, что сужение $\alpha_i : A_k \to \Omega$ непрерывно при всех $i = 0, 1 \dots$ и

$$\max\{\mu(\Omega \setminus A_k), \mu(\Omega \setminus B_k)\} < k^{-1}, \tag{6}$$

$$||\chi_{A_k}[(o)\sum_{i \geqslant m_k} S_i]\chi_{B_k}|| < k^{-1}. \tag{7}$$

Существование таких $m_k, A_k$ и $B_k$ следует из леммы 1 и теоремы Лузина ([9, с. 62]). Кроме того так как оператор $V$ диффузный, то согласно теореме при выборе компакта $A_k$ можно учесть дополнительно следующее условие:

$$\text{если } C_n \in \Sigma \text{ и } C_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ то } ||\chi_{A_k} V \chi_{B_k}|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Рассмотрим операторную последовательность

$$\chi_{A_k}\left(\sum_{i=0}^{m_k} P_i + Q\right)\chi_{B_k}, \;\; k = 1, 2, \dots .$$

По построению

$$||\chi_{A_k} R \chi_{B_k} - R_k|| \leqslant |||\chi_{A_k} R \chi_{B_k} - R_k||| \leqslant ||\chi_{A_k}[(o)\sum_{i \geqslant m_k} S_i]\chi_{B_k}|| < k^{-1}\,. \tag{8}$$

Обозначим $P_{0k} = \chi_{A_k} R \chi_{B_k}$. Покажем, что

$$||P_{0k}|| \leqslant ||R_k|| \ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{9}$$

Ввиду теоремы Халмоша-Неймана-Рохлина о метрическом изоморфизме стандартных пространств с неатомарной мерой [10, Глава 3, §1, примечания к главе 3] без ограничения общности будем предполагать, что $(\Omega, \Sigma, \mu)$ – отрезок $[0, 1]$ со стандартными $\sigma$-алгеброй и мерой Лебега. Через $B$ обозначим замкнутый единичный шар пространства $L^p$.

Положим $n = 0, \Omega_n = [0, 1]$. Разобьем отрезок $\Omega_n$ на отрезки $\Omega_n^1$ и $\Omega_n^2$ равной длины. Так как оператор $P_{0k}$ сохраняет дизъюнктность, то

$$|P_{0k}\chi_{\Omega_n^1} f| \wedge |P_{0k}\chi_{\Omega_n^2} f| = 0$$

для всех $f \in L^p$. Следовательно,

$$||P_{0k} f||^p = ||P_{0k}\chi_{\Omega_n^1} f||^p + ||P_{0k}\chi_{\Omega_n^2} f||^p \leqslant (\max_{j=1,2} ||P_{0k}\chi_{\Omega_n^j}||^p)||f||^p \, .$$

Отсюда

$$||P_{0k}|| \leqslant \max_{j=1,2} ||P_{0k}\chi_{\Omega_n^j}|| \, .$$

Обратное неравенство очевидно, поэтому

$$||P_{0k}|| = \max_{j=1,2} ||P_{0k}\chi_{\Omega_n^j}|| \, .$$

Из множеств $\Omega_n^j$, $j = 1, 2$ выберем множество $\Omega_{n+1}$ так, чтобы

$$||P_{0k}|| = ||P_{0k}\chi_{\Omega_{n+1}}|| \, .$$

Затем найдем элемент $f_{n+1} = \chi_{\Omega_{n+1}} f \in B$, удовлетворяющий неравенству

$$||P_{0k} f_{n+1}|| \geqslant (1 - 2^{-(n+1)})||P_{0k}|| \, .$$

Полагая номер $n + 1$ и продолжая построение, получим убывающую последовательность $\Omega_1 \supset \dots \supset \Omega_n \supset \dots$ замкнутых отрезков, а также последовательность $f_1 = \chi_{\Omega_0} f_1, \dots, f_n = \chi_{\Omega_n} f_n, \dots$ элементов шара $B$, для которой

$$||P_{0k} f_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ||P_{0k}|| \, .$$

Кроме этого, по построению

$$\Omega_n = 2^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ясно, что пересечение $\cap_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ состоит из единственной точки. Обозначим эту точку через $\omega_0$.

При каждом $i = 0, \dots, m_k$ отображение $\alpha_i : A_k \to \Omega$ непрерывно. Поэтому из (2) следует, что для некоторой открытой окрестности $\mathcal{U}_0$ точки $\omega_0$ множества $(\alpha_0^{-1}\mathcal{U}_0) \cap A_k, \dots, (\alpha_{m_k}^{-1}\mathcal{U}_0) \cap A_k$ попарно дизъюнктны. Фиксируя $\mathcal{U}_0$, найдем такое целое число $N$, что $\Omega_n \subset \mathcal{U}_0$ при всех $n \geqslant N$. При этих значениях $n$

$$|[\chi_{A_k} P_i \chi_{B_k}] f_n| \leqslant ([\chi_{A_k} S_i \chi_{B_k \cap \Omega_{n+1}}]|f_n|)(\omega) = \chi_{A_k \cap \alpha_i^{-1}(B_k \cap \Omega_{n+1})} |a_i(\omega)||f_n(\alpha_i(\omega))|.$$

для всех $i = 0, \dots, m_k$ и для п.в. $\omega \in \Omega$.

Теперь становится очевидным, что при $n \geqslant N$ функции в наборе $\{\chi_{A_k} P_i \chi_{B_k} f_n\}_{i=0}^{m_k}$ попарно дизъюнктны. Отсюда

$$||P_{0k} f_n|| = ||\chi_{A_k} P_0 \chi_{B_k} f_n|| \leqslant ||\chi_{A_k} \sum_{i=0}^{m_k} P_i \chi_{B_k} f_n|| \,.$$

Далее, в силу (5) и (8)

$$||\chi_{A_k} Q \chi_{B_k} f_n|| \leqslant ||\chi_{A_k} V \chi_{B_k} |f_n||| \leqslant ||\chi_{A_k} V \chi_{B_k \cap \Omega_{n+1}}|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Таким образом,

$$||P_{0k}|| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} {}_0 ||P_{0k} f_n|| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} {}_0 ||\chi_{A_k} \sum_{i=0}^{m_k} P_i \chi_{B_k} f_n|| \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} {}_0 ||[R_k - \chi_{A_k} Q \chi_{B_k}] f_n|| \leqslant ||R_k|| + \varliminf_{n\to\infty} {}_0 ||\chi_{A_k} V \chi_{B_k \cap \Omega_{n+1}}|| = ||R_k||.$$

Неравенство (9) доказано.

Из (8) и (9) следует

$$||\chi_{A_k} P_0 \chi_{B_k}|| \leqslant ||\chi_{A_k} R \chi_{B_k}|| + k^{-1} \,.$$

Это неравенство справедливо для всех $k = 1, 2, \dots$ . Так как норма $L^p$ порядкова непрерывна при $p \in [1, \infty)$, то из (3) следует, что операторная последовательность

$$\chi_{A_k} \left( \sum_{i=0}^{m_k} P_i + Q \right) \chi_{B_k} , \ k = 1, 2, \dots \,.$$

сходится на каждом элементе $f \in L^p$. Отсюда в силу неравенства (9)

$$||P_0|| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} ||\chi_{A_k} P_0|| \,.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Даугавет И. К.* О свойствах компактных операторов в пространстве $C$ // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. № 5. С. 157-158.
2. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* Свойство компактных операторов в пространстве интегрируемых функций // Укр. мат. журн. 1981. Т. 33. С. 374-376.
3. *Kamovitz H.* A propety of compact operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 91. P. 231-236.
4. *Holub J. R.* A propety of weakly compact operators on $C[0,1]$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 97. P. 399-402.
5. *Holub J. R.* Daugavet's equation and operators on $L^1(\mu)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 100. P. 295-300.
6. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах $L^2$: пер. с англ. / под ред. Л. Д. Кудрявцева. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1985. 160 с.
7. *Dixmier J.* Les algebras d'operateurs dans l'espase Hilbertien. Paris.: Gauthier-Villars, 1957.
8. *Шамаев И. И.* Расстояние между оператором взвешенного сдвига и интегральным оператором // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34. № 2. С. 184-190.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
10. *Самородницкий А. А.* Теория меры. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1990. 268 с.
11. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
12. *Weis L.* Decompositions of positive operators and some of their applications // Funct. Anal. Surv. and Recent Results. 3: Proc. 3rd Conf. Paderborn. 1983. P. 95-115.


БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00744-а) и администрации Пермского края (грант № 07-01-96060-р-урал-а).

Поступила в редакцию 5 октября 2009 г.

Simonov P. M., Chistyakov A. V. To the Daugavet's theorem. In article it is formulated the following theorem. Let $L^p = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $p \in [1, \infty]$, is a Banach space on separable space with a nonatomic measure. Then for any positive operator of substitution with weight $S : L^p \to L^p$ an initial projector $\mathcal{R}_S : \mathcal{M}(L^p) \to \to \mathcal{M}(L^p)$, generated by a strip $\mathcal{R}_S := [S]^{dd}$, has individual norm. From the theorem the following statement at once follows. If the operator $K \in \mathcal{M}(L^p)$ has a majorant $V$, disjoint with $S$ (for example, $K$ is integrated operator), $||S + K|| \geqslant ||S||$. This statement considerably strengthens numerous generalisations of the known theorem of I. K. Daugavet. The most interesting applications the theorem announced here can have in the spectral theory of operational algebras majorizing the operators generated lattice homomorphism.

Key words: positive operator of substitution with weight; diffuse operator; Daugavet's theorem.

УДК 517.95

# РАВНОСТЕПЕННАЯ КВАЗИНИЛЬПОТЕНТНОСТЬ: ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРИЗНАКИ, ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ

© В. И. Сумин

Ключевые слова: равностепенно квазинильпотентное семейство операторов; вольтеррова цепочка оператора; теорема об эквивалентной норме; управляемое вольтеррово функционально-операторное уравнение; условия сохранения глобальной разрешимости.

Вводятся понятия равностепенно квазинильпотентного и суперравностепенно квазинильпотентного семейства операторов. Формулируются соответствующие признаки для случая функциональных операторов. Обсуждаются применения введенных понятий и сформулированных признаков в теории управляемых функционально-операторных уравнений.

Примем следующие обозначения:

$\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — фиксированное измеримое по Лебегу, ограниченное множество, играющее роль основного множества изменения независимых переменных $t = \mathrm{col}\{t^1, \ldots, t^n\}$;

$\Sigma = \Sigma(\Pi)$ — $\sigma$-алгебра измеримых подмножеств $\Pi$;

$T$ — некоторая часть $\Sigma$;

$E = E(\Pi)$ — некоторое *банахово идеальное пространство* (БИП) измеримых вещественных функций, определенных на $\Pi$ [1];

$E^m \equiv \underbrace{E \times \ldots \times E}_{\mathrm{m}}$, $\|.\|_{E^m}$ — стандартная норма прямого произведения;

[1] Нормированное пространство $E = E(\Pi)$ измеримых на $\Pi$ функций называется идеальным, если любая измеримая на $\Pi$ функция $x$, не превосходящая по модулю некоторой функции $y \in E$, принадлежит $E$, причем $\|x\| \leqslant \|y\|$ (см., например, [1, с.139]).