10. *Pontryagin L.S., Boltyanski V.G., Gamkrelidze R.V. and Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N. Y.: Wiley, 1962.

11. *Pshenichnyi B.N.* Convex Analysis and Extremal Problems. M.: Nauka, 1980.

12. *Rockafellar R.T. and Wets R.J-B.* Variational Analysis. N. Y.: Springer-Verlag, 1998.

13. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhii.user, 1995.

14. *Subbotin A.I. and Subbotina N.N.* On justification of dynamic programming method in an optimal control problem // J. Izv. Acad. Nauk USSR, Tehn. Kibemet., 1983. V. 2. P. 24-32.

15. *Subbotina N.N.* The Dynamic Programming Method for Local Lipschitz Continuous Functions // Doklady Acad. Nauk, 2003. V. 389. №2. P. 1-4.

ТЕОРЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© **В.И. Сумин (Нижний Новгород)**

Пусть: $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ – фиксированное ограниченное измеримое по Лебегу множество изменения независимых переменных t; $m, l, s \in \mathbf{N}$, $p, q, k \in [1, \infty]$ – заданные числа; T – некоторое семейство измеримых подмножеств Π. Будем рассматривать уравнения вида

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), v(t)\right), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_{p,m}, \tag{1}$$

считая, что $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ – заданная функция, дифференцируемая по $\mathbf{p}$ на $\mathbf{R}^l$ $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^s$ при п.в. $t \in \Pi$ и вместе с производной $f'_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}, \mathbf{v})$ измеримая по t на Π $\forall \{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} \in \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s$ и непрерывная по $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ для п.в. $t \in \Pi$, $v(.)$ – управление из некоторого множества $\mathcal{D} \subset L^s_k \equiv L^s_k(\Pi)$, $A : L^m_p \to L^l_q$ – фиксированный *линейный ограниченный оператор* (л.о.о.), имеющий положительную мажоранту $B : L_p \to L_q$. Л.о.о. B вольтерров на T в том смысле, что $\forall\ H \in T$ сужение $B[z]|_H$ не зависит от значений $z(t)$ при $t \in \Pi \backslash H$. Функцию $z(.) \in L^m_p(H)$, $H \in T$ назовем решением (1) на H, отвечающим управлению $v(.)$, если пара z, v обращает (1) в п.в.-тождество на H; решение на Π назовем глобальным. К подобным уравнениям (1) естественным образом приводятся многие управляемые краевые задачи для уравнений с частными производными. В докладе развиваются результаты [1, 2], формулируются и обсуждаются различные варианты удобных для приложений в теории оптимального управления достаточных условий *устойчивости существования глобальных решений* (у.с.г.р.) уравнений вида (1) относительно возмущений управления. Приведем пример такой теоремы у.с.г.р.

Пусть: $p < q < \infty$; формулы $\hat{f}[y, v](t) \equiv f\left(t, y(t), v(t)\right)$, $t \in \Pi$ и $\hat{f}_1[y, v](t) \equiv f'_{\mathbf{p}}\left(t, y(t), v(t)\right)$, $t \in \Pi$ определяют, соответственно, оператор $\hat{f}[.,.] : L^l_q \times \mathcal{D} \to L^m_p$ и ограниченный оператор $\hat{f}_1[.,.] : L^l_q \times \mathcal{D} \to L^{m \times l}_r$, где $r \in (p, \infty)$, $q^{-1} + r^{-1} = p^{-1}$; $\forall\ v(.) \in \mathcal{D}$ модули всех значений оператора суперпозиции $\hat{f}_1[A[.], v] : L^m_p \to L^{m \times l}_r$ принадлежат некоторому классу $\Gamma \subset L_r$, пересечение которого с любым шаром в L_r есть семейство функций с равностепенно абсолютно непрерывными L_r-нормами; $\forall$ разности h элементов T класс Γ замкнут относительно действия оператора умножения на характеристическую функцию h; $\forall\ \delta > 0\ \exists$ упорядоченная по вложению цепочка множеств $\{H_0 = \varnothing, H_1, \ldots, H_\nu = \Pi\} \subset T$, мера разностей "соседних" элементов которой не превосходит δ.

При указанных условиях уравнение (1) для любого $v \in \mathcal{D}$ не может иметь ни на каком $H \in T$ более одного решения в классе $L_{p,m}(H)$. Пусть класс Ω тех $v \in \mathcal{D}$, каждому из которых отвечает глобальное решение $z_v \in L_{p,m}$ уравнения (1), не пуст. Произвольно фиксируем $v_0 \in \Omega$. Пусть $z_0 \equiv z_{v_0}$. Для $v \in \mathcal{D}$ положим $\Delta_v f(z_0)(t) \equiv f(t, A[z_0](t), v(t)) - f(t, A[z_0](t), v_0(t))$, $r(v, v_0) \equiv \|A[\Delta_v f(z_0)]\|_{q,l}$, где $\|\cdot\|_{q,l}$ - норма в L_q^l.

Т е о р е м а. *Для любых* $d > 0$, $d_0 > 0$ *и любого* $v_0 \in \Omega$ *существуют* $\delta > 0$, $C > 0$ *такие, что всякое управление* $v \in \mathcal{D}$, *удовлетворяющее неравенствам* $\|v - v_0\|_{k,s} < d_0$, $\|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m} < d$, $r(v, v_0) < \delta$, *принадлежит классу* Ω, *при этом* $\|z_v - z_0\|_{p,m} \leqslant C \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m}$, $\|A[z_v - z_0]\|_{q,l} \leqslant \leqslant C \cdot r(v, v_0)$.

Рассматриваются конкретные реализации теорем у.с.г.р. указанного вида в случае управляемых краевых задач, а также конкретные приложения теорем у.с.г.р. в теории оптимального управления распределенными системами (условия оптимальности, сингулярные системы и др.).

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 01-01-00979.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами: Моногр. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 112 с.

2. *Сумин В.И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестн. ННГУ. Матем. моделирование и оптимальное управление / Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1998. № 2(19). С. 138-151.

ИТЕРАТИВНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ГРАДИЕНТНОГО ДВОЙСТВЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© М.И. Сумин (Нижний Новгород)

Доклад посвящен обсуждению алгоритма решения обратной задачи финального наблюдения для линейного параболического уравнения в дивергентной форме на основе аппарата теории оптимального управления и теории двойственности.

Пусть $\pi \equiv (u, v, w) \in \mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(Q_T) : u(x,t) \in U$ п.в. на $Q_T\} \times \{v \in L_2(\Omega) : v(x) \in \in V$ п.в. на $\Omega\} \times \{w \in L_2(S_T) : w(x,t) \in W$ п.в. на $S_T\}$, $U \subset R^m$, $V \subset R^1$, $W \subset R^1$ – выпуклые компакты, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x,t) : x \in S,\ t \in (0,T)\}$, Ω – ограниченная область в R^n с кусочно гладкой границей. Обратная задача состоит в нахождении тройки π, представляющей собой распределенную правую часть уравнения, начальную функцию и граничную функцию на боковой границе цилиндрической области Q_T задания третьей краевой задачи

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t) z_{x_j}) + b_i(x,t) z_{x_i} + a(x,t) z + \langle f(x,t), u(x,t)\rangle = 0, \qquad (1)$$

$$z(x,0) = v(x),\ x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x,t) z = w(x,t),\ (x,t) \in S_T,$$

где $\frac{\partial z(x,t)}{\partial N} \equiv a_{i,j}(x,t) z_{x_j}(x,t) \cos\alpha_i(x,t)$, $\alpha_i(x,t)$ – угол, образованный внешней нормалью к S с осью x_i, по приближенно известному финальному (в некоторый момент времени T) наблюдению