УДК 517.98

ОПЕРАТОРНО-ВЕКТОРНОЕ ПРАВИЛО КРАМЕРА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© В.И. Фомин

Fomin V.I. The Cramer operator vector rule for the solution of the systems of linear vector equations in the Banach space. The Cramer rule for the solution of the systems of linear scalar equations is generalized for the systems of linear vector equations with the bounded operator coefficients in the Banach space.

В банаховом пространстве E изучается система вида

$$\begin{cases} \mathrm{A}_{11}x_1 + \mathrm{A}_{12}x_2 + \ldots + \mathrm{A}_{1n}x_n = b_1 \\ \mathrm{A}_{21}x_1 + \mathrm{A}_{22}x_2 + \ldots + \mathrm{A}_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{A}_{n1}x_1 + \mathrm{A}_{n2}x_2 + \ldots + \mathrm{A}_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные элементы из E; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – некоторые заданные элементы из E; $\mathrm{A}_{ij}\,(1 \le i, j \le n)$ – некоторые заданные операторы из $L(E)$, удовлетворяющие условию

$$\mathrm{A}_{ij}\mathrm{A}_{km} = \mathrm{A}_{km}\mathrm{A}_{ij}, \quad \forall\, 1 \le i, j, k, m \le n.$$

Рассмотрим операторный определитель системы (1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \ldots & \mathrm{A}_{1n} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \ldots & \mathrm{A}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{A}_{n1} & \mathrm{A}_{n2} & \ldots & \mathrm{A}_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in P_n} (-1)^{\varphi(j_1, j_2, \ldots, j_n)} \mathrm{A}_{1j_1}\mathrm{A}_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \mathrm{A}_{nj_n}$$

где P_n – множество перестановок индексов $1, 2, \ldots, n$; $\varphi(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ – число инверсий в перестановке $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Введём в рассмотрение операторно-векторные определители системы (1): для любого $1 \le j \le n$

$$\Delta_j(b) = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \ldots & \mathrm{A}_{1j-1} & b_1 & \mathrm{A}_{1j+1} & \ldots & \mathrm{A}_{1n} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \ldots & \mathrm{A}_{2j-1} & b_2 & \mathrm{A}_{2j+1} & \ldots & \mathrm{A}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{A}_{n1} & \mathrm{A}_{n2} & \ldots & \mathrm{A}_{nj-1} & b_n & \mathrm{A}_{nj+1} & \ldots & \mathrm{A}_{nn} \end{vmatrix} \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} A_{kj} b_k,$$

где A_{kj} – операторное алгебраическое дополнение элемента A_{kj} операторного определителя Δ $(1 \le k, j \le n)$:

$$A_{kj} = (-1)^{k+j} M_{kj},$$

где M_{kj} – операторный минор элемента A_{kj} операторного определителя Δ, то есть операторный определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из Δ вычёркиванием его k-ой строки и j-го столбца.

Теорема. *Если* $\exists\, \Delta^{-1} \in L(E)$, *то система (1) имеет единственное решение*

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\Delta^{-1}b_k; \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Доказательство. Заметим, что операторные определители обладают теми же свойствами, что и определители с элементами из коммутативного ассоциативного кольца с единицей [1]. В частности, при любом фиксированном $1 \le i \le n$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{ij} A_{kj} = 0, \quad \forall\, 1 \le k \le n, k \ne i; \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{ij} A_{ij} = \Delta. \tag{4}$$

Подставляя (2) в левую часть i-го уравнения системы (1) $(1 \le i \le n)$ и используя (3), (4), получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{ij} \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\, \Delta^{-1} b_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{ij} A_{kj}\, \Delta^{-1} b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{ij} A_{kj} \Delta^{-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{ij} A_{kj} \right) \Delta^{-1} b_k =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{ij} A_{ij} \right) \Delta^{-1} b_i = \Delta\Delta^{-1} b_i = b_i .$$

Теорема доказана.

Если формулу (2) записать в виде

$$x_j = \Delta^{-1} \Delta_j (b), \quad 1 \le j \le n ,$$

то она становится похожей на обычное правило Крамера для решения систем линейных скалярных уравнений [2] (для операторного определителя Δ можно условиться считать, что $\frac{\mathrm{I}}{\Delta} = \Delta^{-1}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Размыслович Г.П., Феденя М.М., Ширяев В.М.* Геометрия и алгебра. Мн.: Изд-во «Университетское», 1987. С 149.
2. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. С. 57.

Поступила в редакцию 14 мая 2002 г.