$$\delta^{(u)}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{u_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)^{u_{n-1}} \delta(x).$$

Т е о р е м а. *Оператор $A_{\mu,\varepsilon}$ переводит базис x^u из $\mathrm{Pol}\,(\mathbb{R}^{n-1})$ в базис $\delta^{(u)}$ в $\mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^{n-1})$ с множителями:*

$$A_{\mu,\varepsilon}\, x^u = \omega_r(\mu,\varepsilon)\,\delta^{(u)},$$

где $r = u_1 + \ldots + u_{n-1}$, и

$$\omega_r(\mu,\varepsilon) = 2^{n-1}\,\pi^{n-2}\,\Gamma(-\mu-n+1)\,\Gamma(\mu+1-r)\cdot\left[\cos\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\pi - \cos\left(\varepsilon+\frac{n}{2}\right)\pi\right],$$

и обратно, оператор $A_{-\mu-n,\varepsilon}$ переводит базис $\delta^{(u)}(x)$ в базис x^u с множителями:

$$A_{-\mu-n,\varepsilon}\,\delta^{(u)}(x) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-r+1)}x^u.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волотова Н.Б.* Полиномиальное квантование на пространстве $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R})$ // Вестник Тамбовского ун-та, 2003, том 8, вып. 1, 141–142.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУАССОНА И ФУРЬЕ, СВЯЗАННЫЕ С КАНОНИЧЕСКИМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ НА КОМПЛЕКСНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© Л.И.Грошева

Настоящая работа распространяет нашу работу [1], где была рассмотрена плоскость Лобачевского, на произвольное комплексное гиперболическое пространство G/K, где $G = \mathrm{SU}(n-1,1)$, $K = \mathrm{U}(n-1)$. Это пространство можно реализовать как комплексный шар $D: z\bar{z}' < 1$ в $\mathbb{C}^{n-1}$, где z – вектор-строка $(z_1,\ldots,z_{n-1})$, штрих означает транспонирование. Группа G действует на D дробно-линейно:

$$z \mapsto z\cdot g = \frac{z\alpha+\gamma}{z\beta+\delta}, \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

здесь матрица $g \in G$ записана в блочном виде соответственно разбиению $n = (n-1)+1$. Пусть S – граница шара D, она есть сфера $z\bar{z}' = 1$ размерности $2n-3$. Группа G действует на S транзитивно. Подгруппа K состоит из блочно-диагональных матриц.

Инвариантная относительно G мера на D есть $d\mu(z) = p^{-n}dz$, где $p = 1 - z\bar{z}'$, dz – евклидова мера на D. Пусть $\langle F, f\rangle_D$ – скалярное произведение в $L^2(D, d\mu(z))$.

Представления T_σ группы G, связанные с конусом, действуют (мы используем компактную картину) в $\mathcal{D}(S)$ по формуле

$$(T_\sigma(g)\varphi)(s) = \varphi(s\cdot g)|z\beta+\delta|^{2\sigma}.$$

Скалярное произведение $\langle\psi,\varphi\rangle_S$ в $L^2(S, ds)$, где ds – евклидова мера, инвариантно относительно пары $(T_\sigma, T_{1-n-\bar{\sigma}})$. Представления T_σ неприводимы для всех $\sigma \in \mathbb{C}$, за исключением $\sigma \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ и $\sigma \in 1-n-\mathbb{N}$.

Оператор A_σ на $\mathcal{D}(S)$, задаваемый формулой

$$(A_\sigma\varphi)(s) = \int_S |1 - s\bar{t}'|^{2-2n-2\sigma}\varphi(t)dt,$$

сплетает T_σ и $T_{1-n-\sigma}$. Он умножает константы на множитель

$$j(\sigma) = 2\pi^{n-1}(1-n-2\sigma)/\Gamma^2(-\sigma).$$

Оператор A_σ имеет простые полюсы в точках σ таких, что $2\sigma \in 1-n+\mathbb{N}$. Вычеты в полюсе μ обозначаем $\widehat{A}_\mu$ и $\widehat{j}(\mu)$.

Каноническое представление R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, группы G действует в $\mathcal{D}(\overline{D})$ по формуле

$$(R_\lambda(g)f)(z) = f(z\cdot g)|\beta z + \delta|^{-2\lambda-2n}.$$

Скалярное произведение $\langle F, f\rangle_D$ инвариантно относительно пары $(R_\lambda, R_{-\overline{\lambda}-n})$. Это позволяет распространить R_λ на пространство $\mathcal{D}'(\overline{D})$ обобщенных функций на $\overline{D}$.

Представление R_λ порождает два граничных представления L_λ и M_λ – точно так же, как в [1].

Пусть $\lambda, \sigma \in \mathbb{C}$. Преобразование Пуассона $P_{\lambda,\sigma}$: $\mathcal{D}(S) \longrightarrow C^\infty(D)$ и преобразование Фурье $F_{\lambda,\sigma}$: $\mathcal{D}(\overline{D}) \longrightarrow \mathcal{D}(S)$, связанные с каноническим представлением, определяются следующим образом:

$$(P_{\lambda,\sigma}\varphi)(z) = p^{-\lambda-\sigma-n}\int_S |1-z\overline{s}'|^{2\sigma}\varphi(s)ds,$$

$$(F_{\lambda,\sigma}f)(s) = \int_D |1-z\overline{s}'|^{2\sigma}p^{\lambda-\sigma}f(z)dz.$$

Эти преобразования сплетают $T_{1-n-\sigma}$ с R_λ и R_λ с T_σ, соответственно. Они сопряжены друг другу:

$$\langle F_{\lambda,\sigma}f, \varphi f\rangle_S = \langle f, P_{-\overline{\lambda}-n,\overline{\sigma}}\rangle_D.$$

Для K-финитных функций φ и $2\sigma \notin \mathbb{Z}$ имеет место разложение:

$$(P_{\lambda,\sigma}\varphi)(z) = p^{-\lambda-\sigma-n}\sum_{k=0}^{\infty}(C_{\sigma,k}\varphi)(s)p^k + p^{-\lambda+\sigma-1}\sum_{k=0}^{\infty}(D_{\sigma,k}\varphi)(s)p^k,$$

где $z = rs$, $p = 1-r^2$, $C_{\sigma,k}$ и $D_{\sigma,k}$ – некоторые непрерывные операторы в $\mathcal{D}(S)$. Они выражаются через операторы A_σ и $W_{\sigma,k}$:

$$C_{\sigma,k} = A_{1-n-\sigma}W_{\sigma,k}, \quad D_{\sigma,k} = j(\sigma)W_{\sigma,k}.$$

Оператор (дифференциальный) $W_{\sigma,k}$ определяется следующим образом. Пространство $\mathcal{D}(S)$ распадается в прямую ортогональную сумму неприводимых относительно K подпространств $H(u,v)$, $u,v \in \mathbb{N}$; пространство $H(u,v)$ состоит из ограничений на S однородных гармонических многочленов от $z_j, \overline{z}_j$ степеней однородности u, v по $z, \overline{z}$, соответственно. Оператор $W_{\sigma,k}$ на подпространствах $H(u,v)$ есть умножение на числа $w_{\sigma,k}(u,v)$, задаваемые производящей функцией:

$$p^{\sigma+n-1}F(u+\sigma+n-1,\ v+\sigma+n-1;\ 2\sigma+n;\ p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{\sigma,k}(u,v)p^k,$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса. Оператор $W_{\sigma,k}$ имеет простые полюсы по σ в точках $\sigma = (-n-m)/2$, $m = 0,1,\ldots,k-1$, $k \geqslant 1$.

Преобразование Пуассона $P_{\lambda,k}$ имеет полюсы по σ в точках

$$\sigma - \lambda - k,\ \sigma - 1 - n - \lambda + l,\quad k,\ l \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Если полюс принадлежит только одной из серий (1), то он – простой, а вычеты соответственно равны

$$(-1)^k(k!)^{-1}j(\lambda-k)\xi_{\lambda,k},\quad -(-1)^l(l!)^{-1}\xi_{\lambda,l}\circ A_{\lambda-l},$$

где $\xi_{\lambda,k}$ – оператор (граничная проекция) $\mathcal{D}(S) \longrightarrow \Sigma_k(\overline{D})_\xi$, задаваемый в точности такой же формулой, что и в [1]. Он дает диагонализацию представления L_λ при $2\lambda+n-2 \notin \mathbb{N}$.

Пусть полюс μ принадлежит обеим сериям (1). Тогда $2\lambda+n-2 \in \mathbb{N}$. Пусть μ – простой. Это может быть, если $\lambda \in \mathbb{N}$ и $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда вычет равен сумме величин (2). Пусть, наконец, μ – не простой. Тогда он – второго порядка. Старший лорановский коэффициент (коэффициент при $(\sigma-\mu)^{-2}$) равен

$$-2\frac{(-1)^l}{l!}\xi_{\lambda,l}\circ\widehat{A}_{\lambda-l}\ \ (k \geqslant l),\quad 2\frac{(-1)^k}{k!}j(\mu)\xi_{\lambda,k}\ \ (k \leqslant l). \tag{3}$$

Из-за недостатка места мы не пишем вычеты. Полюсы второго порядка дают жордановы клетки второго порядка в разложении L_λ. Их количество равно $[(2\lambda+n)/2]$.

Преобразование Фурье $F_{\lambda,\sigma}$ имеет полюсы по σ в точках

$$\sigma = -\lambda - n - k,\ \sigma - \lambda + l + l,\quad k,\ l \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Если полюс μ принадлежит только одной из серий (3), то он – простой, а вычеты соответственно равны $(1/2)j(-\lambda-n-k)b_{\lambda,k}$ и $(-1/2)A_{-\lambda-n-l}b_{\lambda,l}$, где $b_{\lambda,k}$ – граничный оператор $\mathcal{D}(\overline{D}) \longrightarrow \mathcal{D}(S)$, определяемый через коэффициенты Тейлора $a_m(f)$ функции f по p:

$$b_{\lambda,k} = \sum_{m=0}^{k} \left\{ \sum_{l=0}^{n-2} (-1)^l \begin{pmatrix} n-2 \\ l \end{pmatrix} W_{-\lambda-n-k,k-m-l} \right\} a_m(f).$$

Они сплетают R_λ с $T_{-\lambda-n-k}$ и дают диагонализацию представления M_λ для $-2\lambda-n-2 \notin \mathbb{N}$. Для полюса μ второго порядка (тогда $\mu = -\lambda-n-k = \lambda+1+l$ и еще $\mu<0$ для целого λ) старший лорановский коэффициент равен $\widehat{A}_{-\lambda-n-l}b_{\lambda,l}$ при $k \geqslant l$ и $\widehat{j}(\mu)b_{\lambda,k}$ при $k \leqslant l$. Полюсы второго порядка дают жордановы клетки второго порядка в разложении M_λ для $-2\lambda-n-2 \in \mathbb{N}$. Количество таких клеток равно $[(-2\lambda-n)/2]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грошева Л.И.* Преобразования Пуассона и Фурье, связанные с каноническими представлениями // Вестник Тамбовского ун-та, 2002, том 7, вып. 1, 44–46.

РАЗЛОЖЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НА КОМПЛЕКСНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© Л.И.Грошева

Настоящая работа является распространением нашей работы [1], в которой рассматривалась плоскость Лобачевского, на произвольное комплексное гиперболическое пространство $D = G/K$, где $G = \mathrm{SU}(n-1,1)$, $K = \mathrm{U}(n-1)$. Мы даем разложение канонических представлений R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, группы G на пространстве D. Мы отсылаем к [2] за основными определениями: реализация пространства D в виде комплексного шара $z\bar{z}' < 1$ в $\mathbb{C}^{n-1}$, его граница S, представления R_λ, T_σ $(\lambda,\sigma \in \mathbb{C})$, сплетающий оператор A_σ, преобразования Пуассона и Фурье $P_{\lambda,\sigma}$ и $F_{\lambda,\sigma}$, пространство $\Sigma_k(\overline{D})$ обобщенных функций на $\overline{D} = D \cup S$, сосредоточенных на S, граничные проекции $\xi_{\lambda,k} : \mathcal{D}(S) \to \Sigma_k(\overline{D})$, граничные операторы $b_{\lambda,k} : \mathcal{D}(\overline{D}) \to \mathcal{D}(S)$ и т.д.

Мы ограничимся разложением представлений R_λ, для которых λ лежит в полосах I_k: $(1/2)(-1-n)+k < \mathrm{Re}\lambda < (1/2)(1-n)+k$, $k \in \mathbb{Z}$, на комплексной плоскости.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \in I_0$. Тогда каноническое представление R_λ разлагается в прямой интеграл представлений T_σ непрерывной серии ($\sigma = (1/2)(1-n)+i\rho$) с кратностью 1. А именно, сопоставим каждой функции $f \in \mathcal{D}(\overline{D})$ совокупность $\{F_{\lambda,\sigma}f\}$, $\sigma = (1/2)(1-n)+i\rho$. Это соответствие G-эквивариантно. Справедлива формула обращения:*

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) P_{\lambda,1-n-\sigma} F_{\lambda,\sigma} f \Big|_{\sigma=(1/2)(1-n)+i\rho} d\rho, \tag{1}$$

где

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{8}\pi^{-2n}(2\sigma+n-1)\cdot \sin(2\sigma+n)\pi \cdot \Gamma^2(-\sigma)\Gamma^2(\sigma+n-1).$$

Для вещественных $\lambda \in I_0$ эта теорема дает разложение *унитарных* канонических представлений.

Разложение (1) справедливо не только в смысле поточечной сходимости, но и в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\overline{D})$.

Продолжим аналитически по λ разложение (1), рассматриваемое в $\mathcal{D}'(\overline{D})$, из полосы I_0 в полосу I_{k+1}, $k \in \mathbb{N} = \{0,1,\ldots\}$. Полюсы $\sigma = \lambda - m$ и $\sigma = 1-n-\lambda+m$, $m = 0,1,\ldots,k$, подинтегральной функции (это