

УДК 519.65

АППРОКСИМАЦИЯ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

© О.А. Махинова

Ключевые слова: оператор Лапласа на графе; аппроксимация; конечно-разностные аналоги.

Для оператора Лапласа на графе-звезде рассматриваются разного вида аппроксимации конечномерными операторами, лежащими в основе построения разностных схем для краевых задач с распределенными параметрами на звезде. На полученные конечномерные операторы переносятся все свойства дифференциального оператора, устанавливается погрешность аппроксимаций.

Пусть задан граф-звезда Γ с ребрами γ_k ($k = \overline{1, m}$), примыкающими ко внутреннему узлу ζ . Ребра γ_k ($k = \overline{1, m-1}$) ориентированы «к узлу ζ », ребро γ_m — «от узла ζ ». Ребра γ_k ($k = \overline{1, m-1}$) параметризуются отрезком $[0, \frac{\pi}{2}]$, ребро γ_m — $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Через ξ_k ($k = \overline{1, m}$) обозначим граничные узлы графа Γ .

Рассматривается одномерный оператор Лапласа $A\varphi \equiv -\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, где $\varphi(x)$ принадлежит множеству функций $\mathfrak{R} \subset C^1(\Gamma) \cap C^2[\Gamma]$, удовлетворяющих условиям:

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_k} = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_m}, k = \overline{1, m-1}, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \varphi'(x)_{x=\frac{\pi}{2} \in \gamma_k} = \varphi'(x)_{x=\frac{\pi}{2} \in \gamma_m}, k = \overline{1, m-1}. \quad (2)$$

Областью определения D_A оператора A является множество функций $\varphi(x) \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющих условиям Дирихле: $\varphi(x)_{x=0 \in \gamma_k} = 0, \varphi(x)_{x=\pi \in \gamma_m} = 0, k = \overline{1, m-1}$. Условия (1), (2) являются условиями согласования (трансмиссии) во внутреннем узле ζ звезды Γ .

Т е о р е м а 1 [1]. Для любых функций $\varphi(x), \psi(x) \in D_A$ верны следующие утверждения: $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$, $(A\varphi, \varphi) \geq 0$.

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 1 вытекает симметричность и положительная определенность оператора A .

Построим конечно-разностные аналоги дифференциального оператора A на звезде Γ . Обозначим через x_k^i ($i = \overline{0, N}$) множество точек, принадлежащих ребру $\gamma_k \subset \Gamma$ при $k = \overline{1, m-1}$: каждой точке x_k^i соответствует число $\frac{\pi}{2N}$, началу и концу ребра $\gamma_k, k = \overline{1, m-1}$ соответствуют числовые значения $0 = x_k^0$ и $\frac{\pi}{2} = x_k^N$. Отдельно опишем обозначения для ребра γ_m : x_m^i ($i = \overline{N, 2N}$) множества точек, принадлежащих ребру $\gamma_m \subset \Gamma$: каждой точке x_m^i соответствует число $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2N}$, началу и концу ребра γ_m соответствуют числовые значения $\frac{\pi}{2} = x_m^N$ и $\pi = x_m^{2N}$.

Множество точек x_k^i ($i = \overline{0, 2N}$) (k — индекс ребра графа) назовем сеткой графа Γ и обозначим через Γ^h . Величина $h = \frac{\pi}{2N}$ — шаг сетки.

Каждой функции φ , заданной на графе Γ , сопоставим сеточную функцию (φ^h) : значение $(\varphi^h)_k^i$ в точке $x_k^i \in \Gamma^h$ равно $\varphi(x_k^i), i = \overline{0, 2N}, k = \overline{1, m}$. Тогда конечномерный оператор A^h — конечно-разностный аналог оператора A — задается следующими соотношениями:

$$\frac{-(\varphi^h)_k^{i-1} + 2(\varphi^h)_k^i - (\varphi^h)_k^{i+1}}{h^2}, \quad (3)$$

где индексы i, k принимают следующие значения: при $k = \overline{1, m-1}$ индекс $i = \overline{1, N-1}$, при $k = m$ индекс $i = \overline{N+1, 2N-1}$, и далее

$$(\varphi^h)_k^N = (\varphi^h)_m^N, k = \overline{1, m-1}, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(\varphi^h)_k^N - (\varphi^h)_k^{N-1}}{h} = \frac{(\varphi^h)_m^{N+1} - (\varphi^h)_m^N}{h}, k = \overline{1, m-1}, \quad (5)$$

$$(\varphi^h)_k^0 = 0, k = \overline{1, m-1}, (\varphi^h)_m^{2N} = 0. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е 2. Оператор A^h , задаваемый соотношениями (3)–(6), симметричен и положительно определен.

З а м е ч а н и е 3. Оператор A^h аппроксимирует исходный дифференциальный оператор A с точностью h .

Доказательство представленных в замечаниях утверждений приведены в [1].

С целью повышения точности аппроксимации рассмотрим следующий способ построения конечно-разностного аналога оператора A . Дополним сетку Γ^h «фиктивными точками» $x_k^{N+1} (k = \overline{1, m-1})$ и x_m^{N-1} , этим точкам не соответствует никакое число из промежутка $[0, \frac{\pi}{2}]$ или $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Наложим на них дополнительные условия:

$$(\varphi^h)_k^{N+1} = (\varphi^h)_k^N, (k = \overline{1, m-1}), (\varphi^h)_m^{N-1} = (\varphi^h)_m^N. \quad (7)$$

Тогда конечномерный оператор $\tilde{A}^h$ — другой конечно-разностный аналог оператора A — задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \gamma_1 & \begin{cases} \frac{-(\varphi^h)_1^{i-1} + 2(\varphi^h)_1^i - (\varphi^h)_1^{i+1}}{h^2}, i = \overline{1, N-1}, \\ \frac{-\frac{4}{3}(\varphi^h)_1^{N-1} + 2(\varphi^h)_1^N - \frac{1}{3}(\varphi^h)_2^{N-1} - \frac{1}{3}(\varphi^h)_3^{N+1}}{h^2}, \end{cases} \\ \gamma_2 & \begin{cases} \frac{-(\varphi^h)_2^{i-1} + 2(\varphi^h)_2^i - (\varphi^h)_2^{i+1}}{h^2}, i = \overline{1, N-1}, \\ \frac{-\frac{1}{3}(\varphi^h)_1^{N-1} - \frac{4}{3}(\varphi^h)_2^{N-1} + 2(\varphi^h)_2^N - \frac{1}{3}(\varphi^h)_3^{N+1}}{h^2}, \end{cases} \\ \gamma_m & \begin{cases} \frac{-\frac{1}{3}(\varphi^h)_1^{N-1} - \frac{1}{3}(\varphi^h)_2^{N-1} + 2(\varphi^h)_3^N - \frac{4}{3}(\varphi^h)_3^{N+1}}{h^2}, \\ \frac{-(\varphi^h)_3^{i-1} + 2(\varphi^h)_3^i - (\varphi^h)_2^{i+1}}{h^2}, i = \overline{N+1, 2N-1}, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

$$(\varphi^h)_k^{N+1} = (\varphi^h)_m^{N-1}, k = \overline{1, m-1}, \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(\varphi^h)_k^{N+1} - (\varphi^h)_k^{N-1}}{2h} = \frac{(\varphi^h)_m^{N+1} - (\varphi^h)_m^{N-1}}{2h}, k = \overline{1, m-1}, \quad (10)$$

$$(\varphi^h)_k^0 = 0, k = \overline{1, m-1}, (\varphi^h)_m^{2N} = 0. \quad (11)$$

Т е о р е м а 2. Для оператора $\tilde{A}^h$, определяемого соотношениями (7)–(11), справедливы следующие утверждения

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^N \left(\tilde{A}^h(\varphi^h), (\psi^h) \right) + \sum_{i=N}^{2N-1} \left(\tilde{A}^h(\varphi^h), (\psi^h) \right) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^N \left((\varphi^h), \tilde{A}^h(\psi^h) \right) + \sum_{i=N}^{2N-1} \left((\varphi^h), \tilde{A}^h(\psi^h) \right),$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^N \left(\tilde{A}^h(\varphi^h), (\varphi^h) \right) + \sum_{i=N}^{2N-1} \left(\tilde{A}^h(\varphi^h), (\varphi^h) \right) \geq 0.$$

З а м е ч а н и е 4. Из теоремы 2 вытекает симметричность и положительная определенность оператора $\tilde{A}^h$.

З а м е ч а н и е 5. Оператор $\tilde{A}^h$ аппроксимирует исходный дифференциальный оператор A с точностью h^2 .

Доказательства теоремы 2 и замечаний повторяет рассуждения при доказательстве теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Махинова О.А. Задача теплопереноса на графе-звезде // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). № 3. 2009. С. 17–26.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

Makhinova O.A. Approximation of the one-dimensional Laplace operator on the arbitrary graph-star. Different types of approximation by finite-difference operators for Laplace operator on the graph-star are considered. The difference scheme carries the characteristic of differential operator on it finite-difference analog. The error of approximation is fixed.

Key words: the Laplace operator on the graph; finite-difference analogs.

Махинова Ольга Алексеевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант математического факультета кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, e-mail: moa1002@mail.ru.

УДК 519.95:65

СПОСОБ СУММИРОВАНИЯ ДВУХ ЧИСЕЛ НЕЙРОННОЙ СЕТЬЮ В ТРОИЧНО-СИММЕТРИЧНОМ КОДЕ

© А.А. Маштак

Ключевые слова: архитектура нейронной сети; троично-симметричный код.

Обоснована возможность использования нейронной сети для выполнения точных арифметических операций в троичном симметричном коде для любых значений операндов. Представлена схема нейронной сети и виды нейронов, участвующих в выполнении операций сложения и вычитания.

Современный уровень развития теории нейронных сетей и практики реализации их архитектуры позволяют создавать различные по принципу построения нейро-ЭВМ:

- программное — все элементы НС реализуются программно на универсальных ЭВМ с архитектурой фон Неймана;
- аппаратно-программное — часть элементов реализуется аппаратно, а часть программно;
- аппаратное — все элементы НС выполнены на аппаратном уровне, кроме специфических программ формирования синаптических коэффициентов.