УДК 519.688

К ПРОБЛЕМЕ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМА СИМВОЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

© С. М. Тарарова

Ключевые слова: принцип Лиувилля об элементарном интеграле, дифференциальное поле, символьное интегрирование, полиномиальная часть интеграла, элементарные функции.
Работа посвящена интегрированию композиций элементарных функций. Интеграл представляется в виде суммы полиномиальной части и дробно-рациональной части. Трансцендентные функции, которые входят в эти части, — это логарифмические или экспоненциальные функции над дифференциальным полем. Мы рассматриваем интеграл только для полиномиальной части. В решении этой задачи центральную роль играет теорема Лиувилля. Эти алгоритмы используются в системе компьютерной алгебры Mathpar.

1 Введение

К классу элементарных функций относятся алгебраические функции, экспонента, логарифмическая функция и любые их конечные композиции. Такие композиции в комплексной области можно свести к тригонометрическим, гиперболическим и обратным им функциям.

С рациональными функциями принципиальных трудностей нет. Интеграл от рациональной функции всегда существует в виде элементарной функции. Алгоритм интегрирования дробно-рациональных функций был представлен Эрмитом [1] более века назад, который использует только полиномиальные операции без введения алгебраических расширений.

С алгебраическими функциями дело обстоит сложнее. Числа, являющиеся корнями полиномов с рациональными коэффициентами, называются алгебраическими числами. Они приводят нас к обобщению класса рациональных функций — алгебраическим функциям.

Алгебраическая функция y от переменной x задаётся неявным образом через полином от x и y:

$$p_n(x)y^n + \cdots + p_1(x)y + p_0(x) = 0,$$

где $p_i(x)$ — полиномы с рациональными коэффициентами, $i = 0, \ldots, n$.

Проверка, принадлежит ли подынтегральная функция данному классу, осуществляется с помощью структурной теоремы Риша [2]. Далее теорема Лиувилля [1] (1833г.) позволяет определить вид элементарного интеграла, если такой существует.

Роберт Риш [3] из Калифорнийского университета в 1969-1970 годах опубликовал алгоритм, приводящий любую элементарную функцию к виду $v_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i * \frac{v_i'}{v_i}$ или определяющий, что такое приведение невозможно и, следовательно, интеграла как элементарной функции нет. Алгоритм Риша являлся на время своего опубликования алгоритмом интегрирования лишь чисто трансцендентных функций. Для алгебраических составляющих Риш привёл в общих чертах доказательство существования алгоритма, но чтобы сделать из него алгоритм, потребовался ещё не один десяток лет.

Первая реализация алгоритма Риша была выполнена Джоэлом Мозесом [4] в рамках знаменитого «Project MAC» в MIT в 1971 г. Программа под названием SIN интегрировала чисто трансцендентные функции.

Дэвенпорт [5] в 1981 г., основываясь на работе Риша и некоторых глубоких результатах дифференциальной алгебры и комплексного анализа, разработал алгоритм интегрирования чисто алгебраических функций и реализовал его в известной среде символьных вычислений REDUCE-2.

Программы Мозеса и Дэвенпорта служили для решения двух частных случаев одной задачи, но для общего случая — интегрирования произвольных элементарных функций — были одинаково непригодны.

Алгоритм Дэвенпорта ещё и обладал большой вычислительной сложностью, что его автор признавал и выражал надежду, что алгоритм можно упростить. Так и произошло: Барри Трагер [6] из MIT в 1984 г. внёс серьёзные улучшения в алгоритм Дэвенпорта. Обновлённый алгоритм обладал гораздо большей практической ценностью и был реализован в математических программах Axiom и Maple.

Решающий шаг к практическому решению вопроса сделал Мануэль Бронштейн [7] в 1990 г, обобщив алгоритм Трагера на произвольные элементарные функции. В 1998 г. Бронштейн написал монографию [8] по символьному интегрированию, в которой понятным языком изложил лучшие достижения в этой области, начиная с теоремы Лиувилля и заканчивая собственными результатами. Бронштейн был одним из ведущих разработчиков Axiom. Вместе с Трагером он реализовал в Axiom свой алгоритм, но лишь частично.

Целью данной статьи является разработка полного алгоритма нахождения интеграла от полиномиальной части композиции элементарных функции. Особое внимание уделяется специальным частным случаям. Мы опираемся на предыдущую работу [9].

2 Принцип Лиувилля

Основной результат интегрирования элементарных функций был впервые представлен Лиувиллем [10] в 1833 году. Принцип Лиувилля является базовым алгоритмическим подходом интегрирования элементарных функций.

Для формулировки принципа Лиувилля введем некоторые понятия.

Определение 1. *Дифференциальным полем называется поле F, в котором определена операция дифференцирования d, удовлетворяющая правилу Лейбница*

$$d(f * g) = d(f) * g + f * d(g)$$

и свойству дистрибутивности относительно сложения

$$d(f+g) = d(f) + d(g).$$

Пример 1. $R(x, e^x)$ — дифференциальное поле, которое содержит рациональные функции от e^x, чьи коэффициенты являются полиномами или рациональными функциями от x. Дифференциальное поле $R(x, e^x)$ является расширением поля $R(x)$, которое содержит полиномы или рациональные функции от x. Функция $\ln(x) \notin R(x, e^x)$ и $\ln(x+1) \notin R(x, e^x, \ln(x))$, но $\ln(x^2+x) \in R(x, e^x, \ln(x), \ln(x+1))$, так как $\ln(x^2+x) = \ln(x) + \ln(x+1)$. Дифференциальное поле $R(x, e^x, \ln(x), \ln(x+1))$ является расширением поля $R(x, e^x)$ и т.д.

Определение 2. *Полем констант K дифференциального поля F называется множество элементов поля, которые при дифференцировании обращаются в ноль:*

$$K = \{x : x \in F, d(x) = 0\}.$$

Теорема 1. Принцип Лиувилля. Пусть F — некоторое дифференциальное поле с полем констант K. Для $f \in F$ пусть существует $g \in G$ такое, что $g' = f$, т.е. $g = \int f$, где G — элементарное расширение F, имеющее такое же поле констант K. Тогда существуют $v_0, v_1, \ldots, v_m \in F$ и константы $c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$ такие, что

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^{m} c_i * \frac{v_i'}{v_i}.$$

Другими словами:

$$\int f = v_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \ln(v_i).$$

Доказательство.

Предположим, что существуют $\theta_1, \ldots, \theta_N$ такие, что

$$G = F(\theta_1, \ldots, \theta_N),$$

где каждый элемент θ_i является либо логарифмической функцией, либо экспонентой над полем $F_{i-1} = F(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Пусть каждое расширение поля $F(\theta_1, \ldots, \theta_i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, имеет одинаковое поле констант K и существует $g \in G$, удовлетворяющее равенству $g' = f$. Доказательство основано на введении числа N элементарных расширений, входящих в G.

Если $N = 0$, то по условию теоремы существует $g \in F$, удовлетворяющее равенству $g' = f$. Тогда $m = 0$ и $f = v_0'$ и, следовательно, $v_0 = g$.

Предположим, что теорема верна для любого числа расширений меньше, чем N. Для случая N расширений мы можем записать поле $F(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ в виде $F(\theta_1)(\theta_2, \ldots, \theta_N)$. Так как $f \in F(\theta_1)$ и $g \in F(\theta_1)(\theta_2, \ldots, \theta_N)$ удовлетворяют равенству $g' = f$, то мы можем предположить, что существуют $v_i(\theta_1) \in F(\theta_1)$ и константы $c_i \in K$, $1 \leqslant i \leqslant m$, для которых выполняется

$$f = v_0'(\theta_1) + \sum_{i=1}^{m} c_i * \frac{v_i'(\theta_1)}{v_i(\theta_1)}. \tag{1}$$

Для простоты обозначим θ_1 через θ.

Рассмотрим случай, когда функция θ трансцендентная и логарифмическая над F. Пусть $v_0(\theta) \in F(\theta)$ будет представлена в виде

$$v_0(\theta_1) = \frac{a(\theta)}{b(\theta)},$$

где $a,\ b \in F[\theta],\ GCD(a,b) = 1$. Мы можем представить $b(\theta)$ в виде

$$b(\theta) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i^{r_i}(\theta),$$

где $b_i(\theta)$ — различные неприводимые полиномы в $F[\theta]$ и $r_i \in \mathbb{Z}, r_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant \mu$. Разложим $v_0(\theta)$ на простейшие дроби:

$$v_0(\theta) = a_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}(\theta)}{b_i^j(\theta)},$$

где $a_0, a_{ij}, b_i \in F[\theta]$ и $deg(a_{ij}) < deg(b_i)$. Из равенства (1) получаем

$$f = a_0'(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{r_i}\left(\frac{a_{ij}'(\theta)}{b_i^j(\theta)} - \frac{ja_{ij}(\theta)b_i'(\theta)}{b_i^{j+1}(\theta)}\right) + \sum_{i=1}^{m} c_i\frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)}. \tag{2}$$

Важным свойством равенства (2) является то, что его левая часть не зависит от θ.

Так как функция θ — логарифмическая функция над F, то существует функция $u \in F$ такая, что $\theta' = u'/u$. Пусть $p(\theta)$ — некоторый неприводимый полином в $F[x]$ положительной степени. Тогда $p'(\theta) \in F[\theta]$, если $\deg(p'(\theta)) < \deg(p(\theta))$ и, следовательно, $p(\theta)$ не делит $p'(\theta)x$. Если $p(\theta)$ является одним из $b_i(\theta)$ с максимальной степенью r_i, для некоторого $i \in \{1, \ldots, \mu\}$, то правая часть равенства (2) содержит ровно одно слагаемое, знаменатель которого есть $p^{r_i+1}(\theta)$. Тогда не существует другого слагаемого, с которым он в сумме даст ноль. Следовательно, этот многочлен должен находиться в левой части равенства, что противоречит тому, что f не зависит от θ. Из этого можно сделать вывод, что средний член равенства (2) (двойная сумма) должна быть равна 0. Если $p(\theta)$ является одним из $v_i(\theta)$, входящих в правую часть равенства (2), то существует ровно одно слагаемое, знаменателем которого является $p(\theta)$, снова противоречие. Отсюда делаем вывод, что не существуют в равенстве (2) слагаемых, имеющих в знаменателе элемент θ.

$$f = a_0'(\theta) + \sum_{i=1}^{m} c_i\frac{v_i'}{v_i},$$

где $a_0 \in F[\theta],\ v_i \in F$ и $c_i \in K$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Так как f и v_i не зависят от θ, то $a_0'(\theta)$ не должно зависеть от θ. Тогда

$$a_0(\theta) = c\theta + d \in F[\theta]$$

для некоторой константы $c \in K$ и некоторой функции $d \in F$. Следовательно,

$$f = d' + c\frac{u'}{u} + \sum_{i=1}^{m} c_i\frac{v_i'}{v_i},$$

где $d,\ u,\ v_i \in F$ и $c,\ c_i \in K$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Получили желаемую форму.

Аналогично и для случая, когда функция θ экспоненциальная над F.

3 Символьное интегрирование элементарных функций

Сформулируем задачу интегрирования в конечном виде. Пусть $F(x,\theta_1,\dots,\theta_n)$ — дифференциальное поле и K — поле констант, x — переменная, для которой $x'=1$, и для любого $i=1,\dots,n$ элемент θ_i является либо логарифмической, либо экспоненциальной функцией над полем $F_{n-1}=F(x,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})$.

Построим алгоритм, позволяющий для произвольной элементарной функции $f\in F_n$ найти элементарную функцию $g(x)$, для которой $g'(x)=f$, или доказать, что такой функции не существует. Алгоритм интегрирования имеет рекурсивный характер, то есть от задачи, сформулированной в терминах поля F_i, нужно перейти к одной или нескольким задачам над полем F_{i-1}.

Для вычисления полиномиальной части интеграла рассмотрим отдельно случаи, когда последнее расширение θ_n является логарифмической функцией и экспонентой. Обозначим для простоты θ_n через θ.

θ — логарифмическая функция.

Рассмотрим случай интегрирования полиномиальной части интеграла, где последнее расширение $\theta=\theta_n$ — логарифмическая функция над $F(x,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})$, то есть $\theta=\ln(u)$, где $u\in F_{n-1}$. Для подынтегрального выражения $f\in F(x,\theta_1,\dots,\theta_n)$ полиномиальной частью является полином $p(\theta)\in F_{n-1}[\theta]$. Пусть $p(\theta)=\sum_{i=0}^{n}p_i\theta^i$, где $p_i\in F_{n-1}$. По принципу Лиувилля, если $\int p(\theta)$ берется в элементарном виде, то

$$p(\theta)=v_0'(\theta)+\sum_{i=1}^{m}c_i\frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)}.$$

Пусть $v_0(\theta)=\sum_{i=0}^{n+1}B_i\theta^i$, где $B_i\in F_{n-1}$. Процесс интегрирования заключается в нахождении коэффициентов B_i, $i=1,\dots,n+1$, из равенства:

$$\sum_{i=0}^{n}p_i\theta^i=\left(\sum_{i=0}^{n+1}B_i\theta^i+\sum_{i=1}^{m}c_i\ln\left(v_i(\theta)\right)\right)'=\sum_{i=0}^{n+1}B_i'\theta^i+\sum_{i=1}^{n+1}iB_i\theta'\theta^{i-1}+\sum_{i=1}^{m}c_i\frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)}.$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов находим B_i, $i=1,\dots,n+1$.

$$\begin{cases}0=B_{n+1}',\\ p_n=B_n',\\ p_{n-1}=B_{n-1}'+nB_n\theta',\\ \dots\\ p_k=B_k'+(k+1)B_{k+1}\theta',\\ \dots\\ p_0=B_0'+B_1\theta'+\sum_{i=1}^{m}c_i\frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)}=\bar{b}'+B_1.\end{cases}\quad \text{Тогда}\quad \begin{cases}B_{n+1}=0,\\ B_n=\int p_n,\\ B_{n-1}=\int(p_{n-1}-nB_n\theta'),\\ \dots\\ B_k=\int(p_k-(k+1)B_{k+1}\theta'),\\ \dots\\ \bar{b}=\int(p_0-B_1\theta').\end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим интеграл $\int\ln(x)$.

Введем обозначение $\theta=\ln(x)$, тогда $\theta'=\frac{1}{x}$. Элемент θ является трансцендентным над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Будем рассматривать θ как независимую переменную над полем $\mathbb{Q}$. Если интеграл является элементарным, то

$$\int\theta=B_2\theta^2+B_1\theta+\bar{b}.$$

Приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях θ:

$$\begin{cases} 0 = B_2', \\ 1 = B_1', \\ 0 = \bar{b}' + B_1\theta'. \end{cases} \qquad \begin{cases} B_2 = 0, \\ B_1 = \int 1 = x, \\ \bar{b} = \int -1 = -x. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int \ln(x) = x\ln(x) - x.$$

θ — экспонента.

Пусть $\theta = \theta_n$ — экспоненциальная функция над $F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$, то есть $\theta = e^u$, где $u \in F_{n-1}$. Полиномиальной частью подынтегрального выражения $f \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ является расширенный полином $p(\theta) \in F_{n-1}[\theta]$. Пусть $p(\theta) = \sum\limits_{i=-k}^{l} p_i\theta^i$, где $p_i \in F_{n-1}$, $i = -k, \ldots, l$. По принципу Лиувилля, если $\int p(\theta)$ берется в элементарном виде, тогда

$$p(\theta) = v_0'(\theta) + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)}.$$

Пусть $v_0(\theta) = \sum\limits_{i=-k}^{l} q_i\theta^i$, где $q_i \in F_{n-1}$. Процесс интегрирования заключается в нахождении коэффициентов q_i, $i = -k, \ldots, l$, из равенства:

$$\sum_{i=-k}^{l} p_i\theta^i = \left(\sum_{i=-k}^{l} q_i\theta^i + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i(\theta))\right)' = \sum_{i=-k}^{l} q_i'\theta^i + \sum_{i=-k}^{l} iB_i\theta^i + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)}.$$

Приравниваем коэффициенты при степенях θ, получаем

$$p_i = q_i' + i * u' * q_i \text{ при } i \neq 0, \tag{3}$$

$$p_0 = q_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'(\theta)}{v_i(\theta)} = \bar{q}.$$

Для решения данного дифференциального уравнения сначала необходимо определить вид q_i, где q_i — рациональная функция. Пусть $q_i = \frac{a}{b}$, где a и $b \in F_{n-1}$. Если у q_i знаменатель не константа, то степень знаменателя при дифференцировании q_i возрастет и не может быть сокращена с другим слагаемым.

Возможны следующие случаи.

1. p_i — полином, $p_i \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$, то q_i тоже будет полиномом $q_i = a$, где $a \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$.

   - Если u' тоже является полиномом и $u' = v$, где $v \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$, то равенство (3) примет следующий вид:

$$p_i = a' + iva. \tag{4}$$

   - Если u' — дробно-рациональная функция $u' = \frac{v}{w}$, где $v, w \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ и $\deg(v) < \deg(w)$), то равенство (3) примет вид:

$$p_i w = wa' + iva. \tag{5}$$

2. p_i — дробно-рациональная функция, т.е. $p_i = \frac{r}{g}$, где $r, g \in F_{n-1}$, то q_i тоже будет дробно-рациональной функцией $q_i = \frac{a}{b}$, где $a, b \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ и $\deg(a) < \deg(b)$.

   - Если u' является полиномом $u' = v$, где $v \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$, то равенство (3) примет следующий вид:
   $$\frac{r}{g} = \frac{a'b - ab'}{b^2} + \frac{iva}{b}.$$
   Тогда
   $$b = \sqrt{g}, r = a'b - ab' + ivab = ba' + (-b' + ivb)a. \qquad (6)$$

   - Если u' — дробно-рациональная функция $u' = \frac{v}{w}$, где $v, w \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ и $\deg(v) < \deg(w)$, то равенство (3) примет вид:
   $$\frac{r}{g} = \frac{a'b - ab'}{b^2} + \frac{iva}{wb}$$
   и
   $$b = \sqrt{\frac{g}{w}}, r = w(a'b - ab') + ivab = wba' + (-wb' + ivb)a. \qquad (7)$$

Обозначим в равенствах (4) – (7) левую часть через P, коэффициент при a' через $\bar{c}_1$, а коэффициент при a через $\bar{c}_2$. В результате получается равенство:
$$P = \bar{c}_1 a' + \bar{c}_2 a, \qquad (8)$$
где $P, \bar{c}_1, \bar{c}_2, a \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$.

Найдем полином a. Сначала проведем оценку степени полинома a. Пусть $\deg(a) = h$, тогда если θ_{n-1} — логарифмическая или экспоненциальная функция, то $\deg(a') = h$, а в остальных случаях $\deg(a') = h - 1$.

Рассмотрим три случая.

1) Если $P, \bar{c}_1, \bar{c}_2, a \in F(x)$, то $\deg(P) = h + \max(\deg(\bar{c}_1) - 1, \deg(\bar{c}_2))$. Отсюда следует, что $h = \deg(P) - \max(\deg(\bar{c}_1) - 1, \deg(\bar{c}_2))$. Если $h < 0$, то исходное подынтегральное выражение не интегрируется в элементарном виде. Если $h = 0$, то $a = \frac{P}{\bar{c}_2}$. Если $h > 0$, то $a = \sum\limits_{i=0}^{h} a_i x^i$. Тогда равенство (8) примет вид:
$$P = \bar{c}_1 \left(a_0 + \sum_{i=1}^{h} i a_i x^{i-1} \right) + \bar{c}_2 \sum_{i=0}^{h} a_i x^i.$$
С помощью метода неопределенных коэффициентов можем найти a_i $i = 0, \ldots, h$.

2) Если θ_{n-1} — логарифмическая функция, то $\deg(P) = h + \max(\deg(\bar{c}_1), \deg(\bar{c}_2))$. Отсюда следует, что $h = \deg(P) - \max(\deg(\bar{c}_1), \deg(\bar{c}_2))$. Если $h < 0$, то исходное подынтегральное выражение не интегрируется в элементарном виде. Если $h \geqslant 0$, то $a = \sum\limits_{i=0}^{h} a_i \theta_{n-1}^i$. Тогда равенство (8) примет вид:
$$P = \sum_{i=0}^{t} \bar{p}_i \theta_{n-1}^i = \bar{c}_1 \left(\sum_{i=0}^{h} a_i' \theta_{n-1}^i + \sum_{i=1}^{h} i a_i \theta_{n-1}' \theta_{n-1}^{i-1} \right) + \bar{c}_2 \sum_{i=0}^{h} a_i \theta_{n-1}^i.$$

Приравнивая левую и правую части данного равенства, получаем систему дифференциальных уравнений относительно a_i $i = 0, \ldots, h$, где $a_i \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2})$.

3) Если θ_{n-1} — экспоненциальная функция, тогда помимо старшей степени полинома a находим и младшую степень полинома a, так как $\exp^{-1}(x)$ тоже относится к полиномиальной части. Обозначим через $h1$ старшую степень полинома a, через $h2$ младшую степень полинома a, через $k1$ и $k2$ старшую и младшую степени полинома $\bar{c}_1$ соответственно, через $t1$ и $t2$ старшую и младшую степень полинома $\bar{c}_2$ и $m1$ и $m2$ старшую и младшую степень полинома P. Тогда $h1 = m1 - \max(k1, t1)$ и $h2 = m2 - \max(k2, t2)$. Отсюда получаем, что $a = \sum\limits_{i=h2}^{h1} a_i \theta_{n-1}^i$. Тогда равенство (8) примет вид:

$$P = \sum_{i=m2}^{m1} \bar{p}_i \theta_{n-1}^i = \bar{c}_1 \sum_{i=h2}^{h1} (a_i' + i a_i \mu') \theta_{n-1}^i + \bar{c}_2 \sum_{i=h2}^{h1} a_i \theta_{n-1}^i,$$

где μ — аргумент функции θ_{n-1}. Приравнивая левую и правую части полученного равенства, получаем систему дифференциальных уравнений относительно a_i, $i = h2, \ldots, h1$, где $a_i \in F_{n-2}$ и $F_{n-2} = F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2})$.

Пример 3. Рассмотрим интеграл:

$$\int e^{x^2} dx.$$

Обозначим функцию e^{x^2} через θ. Функция $\theta \in R(x, e^{x^2})$. По принципу Лиувилля, если данный интеграл существует, то его можно представить в виде:

$$\int \theta = B_1(x)\theta + \sum c_i \ln(v_i),$$

где $B_1 \in R(x)$, $v_i \in R(x, \theta)$, $c_i = const$. Продифференцируем обе части и получим:

$$\theta = (B_1' + 2xB_1)\theta + \sum c_i \frac{v_i'}{v_i}.$$

Отсюда следует равенство:

$$1 = B_1' + 2xB_1.$$

Так как левая часть равенства является полиномом от x, то B_1 тоже является полиномом от x. Пусть степень B_1 равна n, тогда $\deg(B_1') = n - 1, \deg(2xB_1) = n + 1$ и $\deg(1) = 0$. Получаем равенство $0 = n + 1$. Так как $n \geqslant 0$, то рассмотренный интеграл не берется в элементарном виде.

Пример 4. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{4x^2 + 4x - 1}{(x+1)^2} e^{x^2}.$$

Обозначим через $\theta = e^{x^2}$. По принципу Лиувилля, если данный интеграл существует, то его можно представить в виде:

$$\int f(\theta) = \int \frac{4x^2 + 4x - 1}{(x+1)^2} \theta = q_1 \theta, \quad q_1 \in Q(x).$$

Откуда получаем

$$\frac{4x^2+4x-1}{(x+1)^2} = q_1' + 2xq_1. \tag{9}$$

Так как левая часть равенства (9) — дробно-рациональная функция, то q_1 тоже будет дробно-рациональной функцией $q_1 = \frac{a}{b}$ и

$$\frac{4x^2+4x-1}{(x+1)^2} = \frac{a'b-ab'}{b^2} + 2x\frac{a}{b}.$$

Тогда $b = x+1$, $4x^2+4x-1 = a'b-ab'+2xab = (x+1)a' + (-1+2x^2+2x)a$. Пусть $\deg(a) = h$, тогда $h = \deg(4x^2+4x-1) - \deg 2x = 1$. Так как $h = 1$, то $a = a_1x + a_0$. Тогда получаем:

$$4x^2+4x-1 = a_1x + a_1 + (-1+2x^2+2x)(a_1x+a_0).$$

Приравниваем коэффициенты при степенях x, получаем $a_1 = 0$, $a_0 = 2$. Тогда

$$\int f = \frac{1}{x+1}e^{x^2}.$$

4 Заключение

Проблеме символьного интегрирования полиномиальной части интеграла была посвящена работа [9], но в ней не был рассмотрен случай, когда последнее расширение является экспоненциальной функцией. В данной статье представлен алгоритм интегрирования полиномиальной части интеграла $\int f$, когда $f \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_n)$, и последнее расширение θ_n является экспоненциальной функцией над $F_{n-1} = F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$. В данном алгоритме анализируются случаи, когда θ_{n-1} является экспонентой или логарифмической функцией, а также случай, когда $F_{n-1} = F(x)$. Рассмотрен метод неопределенных коэффициентов для нахождения полиномиальной части интеграла $\int f$, когда $f \in F(x, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ и последнее расширение θ_n является логарифмической функцией над $F(x, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$. Результатом этих исследований стала разработка в системе компютерной алгебры Mathpar [17],[18] алгоритма символьного интегрирования смешанных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Geddes K., Czapor S., Labahn G.* Algorithms for computer algebra. Kluwer. 1992. Vol. 585.

2. *Панкратьев Е.В.* Элементы компьютерной алгебры (Конспекты спецкурса). М.:Механико-математический факультет МГУ.

3. *Risch R.H.* The problem of integration in finite terms // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. P.167-189.

4. *Joel Moses.* Symbolic integration the stormy decade // Proceedings of the second ACM symposium on Symbolic and algebraic manipulation. 1971. P. 427-440.

5. *Дэвенпорт Д., Сирэ И., Турнье Э.* Компьютерная алгебра: Пер с франц. М.: Мир,1991.

6. *Trager B.* Integration of algebraic functions. PhD Thesis, MIT, 1984.

7. *Bronstein M.* The Transcendental Risch Differential Equation // J. Symbolic Comp. P. 49-60. 1990.

8. *Bronstein M.* Symbolic Integration Tutorial // ISSAC'98, Rostock.

9. *Тарарова С.М.* Символьное интегрирование композиций элементарных функций // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Том 14. Вып. 1. 2009. С. 283-286.
10. *Rosenlicht M.* On Liouville's Theory of Elementary Function // Pacific J. Math. 1976. P. 485-492.
11. *Cherry G.W.* Integration in Finite Terms with Special Functions: the Error Function // J. Symbolic Comp. 1 P. 283-302. 1985.
12. *Kaltofen E.* A Note on the Risch Differential Equation // P. 359-366 in Proc. EUROSAM '84. Lecture Notes in Computer Science 174. ed. J. Fitch. Springer-Verlag 1984.
13. *Knowles P. H.* Integration of a Class of Transcendental Liouvillian Functions with Error-Functions. Part I // D'Youville College. U.S.A. 1988. P. 525-543.
14. *Rothstein M.* Aspects of Symbolic Integration and Simplification of Exponential and Primitive Functions. Ph.D. Thesis. Univ. of Wisconsin. Madison 1976. Vol. 119.
15. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
16. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
17. *Malaschonok G.I.* Project of Parallel Computer Algebra // Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. V. 15. Issue 6. 2010. P. 1724-1729.
18. *Малашонок Г.И.* Компьютерная математика для вычислительной сети // Вестник Тамбовского университета. Сер.: Естественные и технические науки. Том 15. Вып. 1. 2010. С. 322-327.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-07-00755-а) и программы «Развитие потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/10437).

Поступила в редакцию 20 февраля 2012 г.

TO THE PROBLEM OF CONSTRUCTING AN ALGORITHM FOR SYMBOLIC INTEGRATION

© **Svetlana Mikhailovna Tararova**
Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Internatsionalnaya, 33, Tambov, 392000, Russia, Post-graduate Student of Mathematical Analysis Department, e-mail: tararovasveta@gmail.com

Key words: Liouville principle of the elementary integral, differential field, symbolic integration, polynomial part of the integral, elementary functions.
The work is devoted to the integration of the compositions of elementary functions. The integral is the sum of a polynomial and the rational part.Transcendental functions, which are included in these parts - is logarithmic andexponential functions of a differential field. We consider only the integral part of the polynomial. To solve this problem, the central role plays the Liouville theorem. These algorithms are used in the computer algebra system Mathpar.