Для $n = 5$ представление $\pi^{(1)}$ разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l, $\pi_{l,1}$ и $\pi_{l,-1}$, $l \geqslant 1$, действующих в пространствах V_l, W_l^+, W_l^-. Формулы из теоремы 1 изменяются соответственно:

$$R_\sigma(\mathfrak{p})W_l^\pm = (\sigma + l + 1)W_{l-1}^\pm + (\sigma + 1)V_l + (\sigma - l - 1)W_{l+1}^\pm,$$

$$R_\sigma(\mathfrak{p})V_l = (\sigma + l + 1)V_{l-1} + \sigma W_l^+ + \sigma W_l^- + (\sigma - l - 1)V_{l+1}.$$

Отсюда получаем теорему, аналогичную теореме 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
2. *Опимах А.В.* Гармонический анализ в дифференциальных формах на сфере // Вестник Тамбовского ун-та, 2002, том 7, вып. 1, 57–58.
3. *Опимах А.В.* Гармонический анализ в пространстве дифференциальных форм первого порядка на сфере. (см. настоящий том)

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА АЛГЕБРАХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ

© С. В. Цыкина

Алгебра W_n циклических чисел размерности n есть пространство многочленов над $\mathbb{R}$ от переменной i степени $\leqslant n-1$ с соотношением $i^n = 0$. В данной работе мы находим аффинные связности на алгебрах W_2 и W_3, инвариантные относительно группы «движений», а также в пространстве $\mathbb{R}^3$, инвариантные относительно неоднородной группы Гейзенберга.

Пусть M – многообразие с аффинной связностью ∇. Пусть $x(t)$ – кривая на M. Производную по t (t – время) будем обозначать точкой. Касательный вектор есть $\dot{x}$. Определим *ускорение*: $\widehat{x} = \nabla_{\dot{x}}\dot{x}$. *Геодезическая* – это кривая с нулевым ускорением. В локальных координатах x_i ускорение имеет вид

$$\widehat{x}_k = \ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j.$$

Т е о р е м а 1. *Если аффинная связность на $\mathbb{R}^n$ инвариантна относительно группы параллельных переносов, то символы Кристофеля постоянны.*

Показательная функция exp на W_n определяется с помощью стандартного ряда. В частности,

$$\exp(i\varphi) = 1 + i\varphi,\ (n = 2),\ \ \exp(i\varphi + i^2\psi) = 1 + i\varphi + i^2\psi + \frac{1}{2}i^2\varphi^2\ (n = 3).$$

Определим *вращение* пространства W_n вокруг начала координат как умножение на экспоненту от чисто мнимого числа (см. выше). Это – косая деформация пространства $\mathbb{R}^n$. Например, указанная выше экспоненты дают матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varphi & 1 & 0 \\ \psi + \varphi^2/2 & \varphi & 1 \end{pmatrix}$$

Движением пространства W_n назовем линейное преобразование $w \mapsto aw + b$, где a – экспонента от чисто мнимого числа. Любое движение есть либо параллельный перенос (если $a = 1$), либо поворот с центром в точке $c = b/(1-a)$ (если $a \neq 1$). Множество всех движений пространства W_n образует группу.

Теорема 2. *Всякая аффинная связность в пространстве W_2, инвариантная относительно группы движений, в координатах x, y задается матрицами:*

$$\nabla_{\partial/\partial x} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\partial/\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix},$$

где A, B, C, D – вещественные числа, удовлетворяющие соотношениям $A = C + D$.

В алгебре W_2 ускорение $\widehat{w}$ имеет вид $\widehat{w} = \ddot{w} + (A + iB)\dot{x}\dot{w}$, где A, B – параметры аффинной связности. Геодезическая имеет параметрические уравнения: $x(t) = \xi(t) + p_2$, $y(t) = -(1/2)B\xi^2(t) + p_3\xi(t) + p_4$, где $\xi(t) = (1/A)\ln|At + p_1|$, p_1, p_2, p_3, p_4 – постоянные. Исключая параметр t, получим параболу $y = -(B/2)x^2 + c_1x + c_2$.

Теорема 3. *Всякая аффинная связность в пространстве W_3, инвариантная относительно группы движений, в координатах x, y, z задается матрицами:*

$$\nabla_{\partial/\partial x} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & D & 0 \\ C & E & D \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\partial/\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\partial/\partial z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где A, B, C, D, E, F, G – вещественные числа, удовлетворяющие соотношениям $A = D + F$, $B = E + G$.

Ускорение имеет вид $\widehat{w} = \ddot{w} + (A + iB + i^2C)\dot{x}\dot{w}$, где A, B, C – параметры аффинной связности. Геодезическая имеет параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x(t) = \xi(t) + p_2, \\ y(t) = -(1/2)B\xi^2(t) + p_3\xi(t) + p_4, \\ z(t) = (1/6)B^2\xi^3(t) - (1/2)(Bp_3 + C)\xi^2(t) + p_5\xi(t) + p_6, \end{cases}$$

где $\xi(t)$ см. выше, $p_1, \ldots, p_6$ – постоянные.

Возьмем в пространстве W_3 кривую, зависящую от *натурального* параметра $t = x$. Тогда ускорение можно записать в виде: $\widehat{w} = A\tau + \sigma$, где τ – касательный вектор, σ – «вектор кривизны»:

$$\tau = w' = (1, y', z'), \quad \sigma = (0, y'' + F, z'' + Fy' + E),$$

штрих – производная по x. Таким образом, вектор ускорения раскладывается в сумму векторов: вектор, коллинеарный скорости τ, и «ортогональный» ему вектор кривизны σ, лежащий в плоскости $x = 0$. Мы нашли также аналоги формул Френе, однако, они достаточно громоздки и мы их не приводим здесь.

Наша группа G есть подгруппа группы $\widetilde{G}$, которая есть *неоднородная группа Гейзенберга*: параллельные переносы и линейные преобразования с матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \gamma & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 3 получаем:

Теорема 4. *Всякая аффинная связность в пространстве $\mathbb{R}^3$, инвариантная относительно неоднородной группы Гейзенберга, в координатах x, y, z задается матрицами:*

$$\nabla_{\partial/\partial x} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ C & -G & D \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\partial/\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\partial/\partial z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где *A, C, D, F, G – вещественные числа с условием $A = D + F$.*