УДК 517.977.58

ИНТЕРВАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ОДНОРОДНЫЙ СЛУЧАЙ

© В.И. Левин

V.I.Levin. The interval model for the general problem of linear programming: A uniform case. The designed method of comparing intervals and choosing the extreme one which used to be applied for solving non-deterministic problems of discrete programming can also be successfully applied for solving non-deterministic continuous problems of mathematical programmig. In this case, the main advantage of this method is preserved, i.e. one non-deterministic (interval) problem of optimisation can be reduced to two deterministic problems.

1. Введение. Существует множество работ по оптимизации систем с детерминированными параметрами. Соответствующие задачи - это задачи математического программирования, в которых параметры целевых функций и функций ограничений детерминированы. На практике, вследствие неопределенности реальных процессов и других причин, чаще встречаются системы с недетерминированными параметрами. Оптимизация таких систем имеет форму задач математического программирования, в которых указанные параметры - различные недетерминированные величины: случайные, нечеткие, интервальные и т. д. Традиционно к решению недетерминированных задач математического программирования применяли два различных подхода: детерминированный и вероятностный [1]. Первый состоит в решении задачи для определенных значений ее параметров внутри областей их неопределенности. При этом можно выбрать наихудшее сочетание значений параметров (пессимистическая стратегия [1 - 6]), их наилучшее сочетание (оптимистическая стратегия [7]) и др. [8, 9]. Преимущество такого подхода - простота интерпретации решения (так, пессимистическая стратегия дает наилучшее гарантированное решение [1]); недостаток - ориентировка на одно определенное сочетание значений параметров, которое на практике реализуется очень редко. Второй подход состоит в решении задачи для усредненных (ожидаемых) значений ее параметров, согласно заданным вероятностным распределениям этих параметров. Этот подход несколько лучше предыдущего, так как ориентируется хотя и на одно, но зато наиболее часто встречающееся сочетание значений параметров. Его главный недостаток - необходимость иметь вероятностные распределения параметров задачи, что далеко не всегда возможно. Оба изложенных подхода имеют общий недостаток - игнорирование того факта, что недетерминированные параметры задаются множествами их возможных значений, так что решение задачи только для определенных значений параметров, взятых из указанных множеств, означает потерю большей части заданной информации. Поэтому представляет интерес принципиально другой подход, в котором не происходила бы потеря информации о параметрах задачи, т. е. получаемое оптимальное решение учитывало все множество возможных значений параметров задачи внутри заданных областей их неопределенности. В работе [10] был предложен такой подход к решению недетерминированных задач математического программирования, основанный на задании параметров целевых функций и ограничений задачи в виде интервалов возможных значений и использовании специально разработанных методов прямого сравнения интервалов и определения экстремального интервала. Достоинство этого подхода заключается в возможности сведения недетерминированной задачи математического программирования к решению пары соответствующих детерминированных задач, в которых параметры целевых функций и ограничений определяются нижними и верхними границами интервалов - параметров исходной задачи. С помощью данного подхода была решена задача интервального булева линейного программирования [11]. Представляется совершенно естественным распространение подхода [10] на общую задачу линейного программирования, когда переменные целевой функции и ограничений не являются булевыми, а принимают любые непрерывные значения. Особенности этой общей задачи, по сравнению с частными постановками [10, 11], заключаются в том, что в ней неизвестные следует, вообще говоря, искать в той же форме, в которой заданы параметры задачи, т. е. в виде интервалов возможных значений. Таким образом, рассматриваемая задача является полностью интервальной, т. е. в ней не только коэффициенты, но и неизвестные по своей природе есть интервалы. Ситуация, в которой возникает такая, весьма общая задача, отличается от ситуации, рассматриваемой в классической детерминированной задаче линейного программирования - задаче составления оптимальной программы производства при ограниченных ресурсах, следующим. Во-первых, параметры оптимизируемой системы - удельный доход от реализации видов продукции, удельный расход ресурсов на производство различных видов продукции, запасы различных ресурсов - заданы не точно, а в виде интервалов возможных значений. Во-вторых, искомая программа производства различных видов продукции не может быть реализована точно, поэтому ее следует искать также в виде соответствующих интервалов.

2. Постановка задачи. Детерминированный вариант задачи линейного программирования хорошо известен: требуется найти максимум линейной функции

$$Q(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{1}$$

при наличии линейных ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \text{----------} \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{2}$$

и дополнительном условии неотрицательности неизвестных

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \tag{3}$$

В задаче (1) - (3) коэффициенты c_i, b_i, a_{ij}, - детерминированные величины. Детерминированная задача линейного программирования при определенных условиях имеет решение, для нахождения которого существует много различных методов [12]. Недетерминированная (интервальная) задача линейного программирования, изучаемая ниже, отличается от изложенной задачи (1) - (3) тем, что коэффициенты в ней имеют вид замкнутых интервалов $\tilde{c}_i = [c_{i1},\ c_{i2}]$, $\tilde{b}_i = [b_{i1},\ b_{i2}]$, $\tilde{a}_{ij} = [a_{1,ij},\ a_{2,ij}]$, в которых находятся возможные значения их величин. При этом распределение значений коэффициентов внутри указанных интервалов неизвестно. Таким образом, матрица коэффициентов a_{ij} системы ограничений задачи (2) является здесь интервальной матрицей вида $\tilde{A} = \|a_{ij,1},\ a_{ij,2}\| = [A_1,\ A_2]$, где $A_1 = \|a_{ij,1}\|$ - минимальная, а $A_2 = \|a_{ij,2}\|$ - максимальная детерминированная матрица коэффициентов, составленная из минимальных (максимальных) значений коэффициентов. Аналогично, вектор коэффициентов c_i целевой функции (1) оказывается здесь интервальным вектором $\tilde{c} = \|\tilde{c}_i\| = \|[c_{i1},\ c_{i2}]\| = [c_1,\ c_2]$, где $c_1 = \|c_{i1}\|$ - минимальный, а $c_2 = \|c_{i2}\|$ - максимальный детерминированный вектор коэффициентов, составленный из минимальных (максимальных) значений коэффициентов. Наконец, вектор свободных членов b_i системы ограничений (2) становится здесь интервальным вектором $\tilde{b} = \|\tilde{b}_i\| = \|[b_{i1},\ b_{i2}]\| = [b_1,\ b_2]$, где $b_1 = \|b_{i1}\|$ - минимальный, а $b_2 = \|b_{i2}\|$ - максимальный детерминированный вектор свободных членов, составленный из минимальных (максимальных) значений этих членов.

Введение первичных интервальных параметров позволяет сформулировать общую интервальную задачу линейного программирования в следующем виде: найти максимум линейной функции

$$\tilde{Q}(x) = \tilde{c}_1\tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{c}_n\tilde{x}_n \to \max, \tag{4}$$

при наличии линейных ограничений

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n \le \tilde{b}_1 \\ \text{----------} \\ \tilde{a}_{m1}\tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{a}_{mn}\tilde{x}_n \le \tilde{b}_m \end{cases} \tag{5}$$

и дополнительном условии неотрицательности неизвестных

$$\tilde{x}_1 \ge 0, \ldots, \tilde{x}_n \ge 0. \tag{6}$$

Неизвестные в задаче (4) - (6) ищутся в той же интервальной форме, в которой заданы параметры целевой функции и ограничений, т. е.

$$\tilde{x}_1 = [x_{11},\ x_{12}], \ldots, \tilde{x}_n = [x_{n1},\ x_{n2}], \tag{7}$$

и мы имеем интервальный вектор неизвестных $\tilde{x} = \|\tilde{x}_i\| = \|[x_{i1},\ x_{i2}]\| = [x^1,\ x^2]$, где $x^1 = \|x_{i1}\|$, - минимальный, а $x^2 = \|x_{i2}\|$ - максимальный детерминированный вектор неизвестных. В задаче (4) - (6), в отличие от задачи (1) - (3), неизвестные, коэффициенты при неизвестных и свободные члены - недетерминированные (интервальные) величины. В соответствии с принципами интервального анализа [13], произведение и сумма интервалов есть интервал. Таким образом, выражения (4) и (5) при любых значениях неизвестных являются интервалами. Поэтому решением задачи (4) - (6) служит такой номер неизвестных интервалов $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$, удовлетворяющих условию неотрицательности (6), которому соответствует максимальное значение суммарного интервала в (4), при выполнении системы ограничений - неравенств между интервалами (5). Как видим, отыскание решения поставленной задачи требует умения сравнивать интервалы, выбирать экстремальный интервал, строить алгоритмы сравнения и выбора экстремальных интервалов. Все три вопроса были рассмотрены и решены в [1]. На базе этого в настоящей статье устанавливаются условия существования решения поставленной задачи, анализируется структура этого решения и дается алгоритм его отыскания.

3. Некоторые вспомогательные сведения. Для решения задачи нам потребуются некоторые сведения о действиях над интервалами [13]. Сложение и вычитание интервалов и умножение интервала на число выполняются по следующим правилам

$$[a_1,\ a_2] + [b_1,\ b_2] = [a_1 + b_1,\ a_2 + b_2], \tag{8}$$

$$[a_1,\ a_2] - [b_1,\ b_2] = [a_1 - b_2,\ a_2 - b_1], \tag{9}$$

$$[a_1,\ a_2]\cdot k = \begin{cases} [a_1k,\ a_2k],\ k \ge 0, \\ [a_2k,\ a_1k],\ k < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Умножение интервалов выполняется по правилу

$$[a_1,\ a_2]\cdot[b_1,\ b_2] = [\bigwedge_{i,j} a_ib_j,\ \bigvee_{i,j} a_ib_j] = [a_1b_1 \wedge a_1b_2 \wedge \wedge a_2b_1 \wedge a_2b_2,\ a_1b_1 \vee a_1b_2 \vee a_2b_1 \vee a_2b_2], \tag{11}$$

где $\wedge$ = min - операция взятия минимума (конъюнкция непрерывной логики), а $\vee$ = max - операция взятия мак-

симума (дизъюнкция непрерывной логики). В частных случаях определенного сочетания знаков перемножаемых интервалов, представляющих для нас в силу (6) основной интерес, правило (11) существенно упрощается, принимая вид трех формул

$$[a_1,a_2]\cdot[b_1,b_2]=\begin{Bmatrix}[a_1b_1,a_2b_2], \text{ при } [a_1,a_2]\ge 0\\ [a_1b_2,a_2b_1], \text{ при } [a_1,a_2]\le 0\\ [a_1b_2,a_2b_2], \text{ при } a_1\le 0, a_2\ge 0\end{Bmatrix}, \quad (12)$$

$[b_1,b_2]\ge 0.$

Сравнение интервалов и выбор большего (меньшего) интервала выполняется следующим образом [10]. Используем символику непрерывной логики: max = $\vee$ (операция дизъюнкции), min = $\wedge$ (операция конъюнкции). Тогда неравенство двух чисел можно задать эквивалентностью

$$(a\ge b)\Leftrightarrow(a\vee b=a,\ a\wedge b=b). \quad (13)$$

Аналогично определяется неравенство двух интервалов

$$(\tilde a\ge\tilde b)\Leftrightarrow(\tilde a\vee\tilde b=\tilde a,\ \tilde a\wedge\tilde b=\tilde b). \quad (14)$$

Здесь операции дизъюнкции и конъюнкции над интервалами определяются теоретико-множественными конструкциями

$$\tilde a\vee\tilde b=\{a\vee b\,|\,a\in\tilde a, b\in\tilde b\}\ \ \tilde a\wedge\tilde b=\{a\wedge b\,|\,a\in\tilde a, b\in\tilde b\} \quad (15)$$

Интервалы, находящиеся в отношении неравенства (14), должны удовлетворять условию (быть согласованы)

$$(\tilde a\vee\tilde b=\tilde a)\Leftrightarrow(\tilde a\wedge\tilde b=\tilde b). \quad (16)$$

Это условие выполняется для любых двух интервалов [10]. Для того чтобы интервалы $\tilde a=[a_1,a_2]$ и $\tilde b=[b_1,b_2]$ были сравнимы и находились в отношении $(\tilde a\ge\tilde b)$ согласно (14), необходимо и достаточно выполнения условия сравнимости $a_1\ge b_1, a_2\ge b_2$, а для того чтобы они были несравнимы, необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из двух условий несравнимости: $a_1<b_1, a_2>b_2$ или $b_1<a_1, b_2>a_2$. Пусть $\tilde a_1=[a_{11},a_{12}]$, ... , $\tilde a_k=[a_{k1},a_{k2}]$ система интервалов. Назовем $\tilde a_1$ максимальным (минимальным) интервалом, если он сравним с $\tilde a_2$, ... , $\tilde a_k$ и находится с ним в отношениях $\tilde a_1\ge\tilde a_2$, ... , $\tilde a_1\ge\tilde a_k$ (в отношениях $\tilde a_2\ge\tilde a_1$, ... , $\tilde a_k\ge\tilde a_1$). Для того чтобы $\tilde a_1$ был максимальным среди интервалов $\tilde a_1$, $\tilde a_2$, ... , $\tilde a_k$, необходимо и достаточно выполнения двух соотношений

$$a_{11}=\bigvee_{i=1}^{k}a_{i1},\ a_{12}=\bigvee_{i=1}^{k}a_{i2}, \quad (17а)$$

а для того чтобы $\tilde a_1$ был минимальным из этих интервалов - выполнения соотношений

$$a_{11}=\bigwedge_{i=1}^{k}a_{i1},\ a_{12}=\bigwedge_{i=1}^{k}a_{i2}. \quad (17б)$$

4. Детерминизация задачи. Случай 1. Будем решать поставленную интервальную задачу (4) - (6) методом детерминизации [1], т. е. сведением к двум аналогичным детерминированным задачам (1) - (3). Рассмотрим отдельно все три базовых однородных случая: неотрицательных, неположительных и разнозначных коэффициентов в (4) - (6). Абсолютная однородность здесь означает, что все коэффициенты в задаче (4) - (6) всегда имеют одинаковый знак. При этом интервальный коэффициент считается неотрицательным, если все его точки неотрицательны; неположительным, если эти точки неположительны; разнозначным, если он содержит и положительные, и отрицательные точки.

В этом параграфе изучим первый случай, когда все интервальные коэффициенты в задаче (4) - (6) неотрицательны

$$\tilde c_i=[c_{i1},c_{i2}]\ge 0,\ i=\overline{1,n};\ \tilde a_{ij}=[a_{ij,1},a_{ij,2}]\ge 0,\ j=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}. \quad (18)$$

Назовем для рассматриваемого случая нижней (верхней) граничной задачей заданной интервальной задачей (4) - (6) такую детерминированную задачу линейного программирования (1) - (3), которая получена из (4) - (6) заменой всех интервальных коэффициентов и неизвестных их нижними (верхними) границами. Таким образом, нижняя граничная задача имеет вид: найти максимум линейной функции

$$c_{11}x_{11}+\ldots+c_{n1}x_{n1}\to\max \quad (19)$$

при наличии линейных ограничений

$$\begin{cases}a_{11,1}x_{11}+\ldots+a_{1n,1}x_{n1}\le b_{11}\\ ----------\\ a_{m1,1}x_{11}+\ldots+a_{mn,1}x_{n1}\le b_{m1}\end{cases} \quad (20)$$

и условии неотрицательности неизвестных

$$x_{11}\ge 0,\ \ldots,\ x_{n1}\ge 0, \quad (21)$$

а верхняя граничная задача - вид: найти максимум линейной функции

$$c_{12}x_{12}+\ldots+c_{n2}x_{n2}\to\max \quad (22)$$

при линейных ограничениях

$$\begin{cases}a_{11,2}x_{12}+\ldots+a_{1n,2}x_{n2}\le b_{12}\\ ----------\\ a_{m1,2}x_{12}+\ldots+a_{mn,2}x_{n2}\le b_{m2}\end{cases} \quad (23)$$

и условии неотрицательности неизвестных

$$x_{12}\ge 0,\ \ldots,\ x_{n2}\ge 0. \quad (24)$$

Условия сводимости интервальной задачи линейного программирования к соответствующим детерминированным задачам вида (1) - (3) определяет следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы интервальный вектор неизвестных $\tilde{x} = [x^1, x^2]$, *где* $x^1 = \|x_{i1}\|$, *- минимальный, а* $x^2 = \|x_{i2}\|$ *- максимальный детерминированные векторы неизвестных, был решением интервальной задачи линейного программирования (4) - (6) в случае (18), необходимо и достаточно, чтобы ее нижняя граничная задача (19) - (21) имела решение* x^1, *а верхняя граничная задача (22) - (24) – решение* x^2 *и было выполнено неравенство*

$$x^1 \le x^2. \tag{25}$$

Доказательство. Согласно условиям (6), (18) все перемножаемые интервалы в задаче (4) - (6) в рассматриваемом случае неотрицательны. Поэтому можно раскрыть произведения интервалов в (4), (5) с помощью первой формулы (12). В результате задача (4) - (6) перепишется в эквивалентной форме

$$[c_{11}x_{11}, c_{12}x_{12}] + \ldots + [c_{n1}x_{n1}, c_{n2}x_{n2}] \to \max,$$

$$\begin{cases} [a_{11,1}x_{11}, a_{11,2}x_{12}] + \ldots + [a_{1n,1}x_{n1}, a_{1n,2}x_{n2}] \le [b_{11}, b_{12}] \\ \text{----------} \\ [a_{m1,1}x_{11}, a_{m1,2}x_{12}] + \ldots + [a_{mn,1}x_{n1}, a_{mn,2}x_{n2}] \le [b_{m1}, b_{m2}] \end{cases},$$

$$[x_{11}, x_{12}] \ge 0, \ldots, [x_{n1}, x_{n2}] \ge 0.$$

или, после суммирования интервалов по правилу (8), в форме

$$[c_{11}x_{11} + \ldots + c_{n1}x_{n1}, c_{12}x_{12} + \ldots + c_{n2}x_{n2}] \to \max, \tag{26}$$

$$\begin{cases} [a_{11,1}x_{11} + \ldots + a_{1n,1}x_{n1}, a_{11,2}x_{12} + \ldots + a_{1n,2}x_{n2}] \le [b_{11}, b_{12}] \\ \text{----------} \\ [a_{m1,1}x_{11} + \ldots + a_{mn,1}x_{n1}, a_{m1,2}x_{12} + \ldots + a_{mn,2}x_{n2}] \le [b_{m1}, b_{m2}] \end{cases}, \tag{27}$$

$$[x_{11}, x_{12}] \ge 0, \ldots, [x_{n1}, x_{n2}] \ge 0. \tag{28}$$

Согласно правилу выбора экстремального интервала (17а) условие (26) эквивалентно следующей паре условий

$$c_{11}x_{11} + \ldots + c_{n1}x_{n1} \to \max, \tag{29}$$

$$c_{12}x_{12} + \ldots + c_{n2}x_{n2} \to \max. \tag{30}$$

Далее, согласно правилу сравнения интервалов (раздел 3) условия (27) эквивалентны следующей паре условий

$$\begin{cases} a_{11,1}x_{11} + \ldots + a_{1n,1}x_{n1} \le b_{11} \\ \text{----------} \\ a_{m1,1}x_{11} + \ldots + a_{mn,1}x_{n1} \le b_{m1} \end{cases}, \tag{31}$$

$$\begin{cases} a_{11,2}x_{12} + \ldots + a_{1n,2}x_{n2} \le b_{12} \\ \text{----------} \\ a_{m1,2}x_{12} + \ldots + a_{mn,2}x_{n2} \le b_{m2} \end{cases}. \tag{32}$$

Наконец, по определению неотрицательности интервалов, условия (28) эквивалентны такой паре условий

$$x_{11} \ge 0, \ldots, x_{n1} \ge 0, \tag{33}$$

$$x_{12} \ge 0, \ldots, x_{n2} \ge 0. \tag{34}$$

Таким образом, интервальная задача линейного программирования (4) - (6) эквивалентна двухкритериальной детерминированной задаче линейного программирования (29) - (34). Но в последней ограничения на неизвестные (31), (33) относятся только к критерию оптимизации (29), а ограничения на неизвестные (32), (34) - только к критерию оптимизации (30). Следовательно, интервальная задача линейного программирования (4) - (6) фактически эквивалентна паре детерминированных задач линейного программирования: (29), (31), (33) и (30), (32), (34). Первая задача этой пары есть нижняя граничная задача (19) - (21) интервальной задачи (4) - (6), вторая - ее верхняя граничная задача (22) - (24). Сопоставив интервальную задачу (4) - (6) и эквивалентную ей пару детерминированных граничных задач (19) - (21) и (22) - (24), видим, что в интервальном векторе-решении первой задачи $\tilde{x} = [x^1, x^2]$ детерминированные границы – векторы $x^1 = (x_{11}, \ldots, x_{n1})$ и $x^2 = (x_{12}, \ldots, x_{n2})$ суть решения соответственно нижней (19) - (21) и верхней (22) - (24) граничных задач. Отсюда и из того, что нижняя граница x^1 любого интервального вектора $\tilde{x}$ всегда не превосходит его верхней границы x^2, получаем утверждение теоремы.

Теорема 1 показывает, что нижняя (верхняя) граничная задача интервальной задачи линейного программирования (4) - (6) в случае (18) есть детерминированная задача линейного программирования, решение которой дает нижнюю x^1 (верхнюю x^2) границу интервального решения $\tilde{x} = [x^1, x^2]$ задачи (4) - (6). В других случаях, рассматриваемых ниже, нижние и верхние граничные задачи конструируются так, чтобы это их свойство всегда сохранялось.

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема существования решения.

Теорема 2. Для того чтобы интервальная задача линейного программирования (4) - (6) в случае (18) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы имели решения $x^1 = \|x_{i1}\|$ *и* $x^2 = \|x_{i2}\|$ *ее нижняя (19) - (21) и верхняя (22) - (24) граничные задачи и было выполнено неравенство (25).*

В соответствии с теоремами 1, 2 алгоритм отыскания решения интервальной задачи линейного программирования (4) - (6) в случае (18) следующий.

Шаг 1. Отыскание решения $x^1 = \|x_{i1}\|$ нижней граничной задачи (19) - (21) задачи (4) - (6), с использованием какого-либо известного метода решения детерминированных задач линейного программирования, например, симплекс-метода.

Шаг 2. Отыскание решения $x^2 = \|x_{i2}\|$ верхней граничной задачи (22) - (24) задачи (4) - (6), с использованием тех же методов, что и на шаге 1.

Шаг 3. Проверка выполнения неравенства (25). Если выполнено, то решение задачи (4) - (6) существует; переход к шагу 4. Если не выполнено, то искомое решение задачи (4)-(6) не существует и процедура окончена.

Шаг 4. Искомое решение $\tilde{x}$ интервальной задачи (4) - (6) составляется из найденных решений $x^1 = \|x_{i1}\|$, $x^2 = \|x_{i2}\|$ ее нижней (19) - (21) и верхней (22) - (24) граничных задач по правилу

$$\tilde{x} = [x^1, x^2] = ([x_{11}, x_{12}], [x_{21}, x_{22}], \ldots, [x_{n1}, x_{n2}]). \tag{35}$$

5. Детерминизация задачи. Случай 2. Пусть все интервальные коэффициенты в задаче (4) - (6) неположительны.

$$\tilde{c}_i = [c_{i1}, c_{i2}] \le 0, i = \overline{1,n};\ \tilde{a}_{ij} = [a_{ij,1}, a_{ij,2}] \le 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \quad (36)$$

Назовем для этого случая нижней (верхней) граничной задачей интервальной задачи (4) - (6) такую детерминированную задачу линейного программирования (1) - (3), которая получена из (4) - (6) заменой всех интервальных неизвестных их нижними (верхними) границами, а всех интервальных коэффициентов - их верхними (нижними) границами. Таким образом, нижняя граничная задача в рассматриваемом случае имеет вид:

$$c_{12}x_{11} + \ldots + c_{n2}x_{n1} \to \max, \quad (37)$$

при наличии ограничений

$$\begin{cases} a_{11,2}x_{11} + \ldots + a_{1n,2}x_{n1} \le b_{12} \\ \text{----------} \\ a_{m1,2}x_{11} + \ldots + a_{mn,2}x_{n1} \le b_{m2} \end{cases}, \quad (38)$$

$$x_{11} \ge 0, \ldots, x_{n1} \ge 0 \quad (39)$$

а верхняя граничная задача - вид:

$$c_{11}x_{12} + \ldots + c_{n1}x_{n2} \to \max, \quad (40)$$

при наличии ограничений

$$\begin{cases} a_{11,1}x_{12} + \ldots + a_{1n,1}x_{n2} \le b_{11} \\ \text{----------} \\ a_{m1,1}x_{12} + \ldots + a_{mn,1}x_{n2} \le b_{m1} \end{cases}, \quad (41)$$

$$x_{12} \ge 0, \ldots, x_{n2} \ge 0. \quad (42)$$

Следующая теорема есть аналог теоремы 1 для изучаемого случая.

Теорема 3. Для того чтобы интервальный вектор неизвестных $\tilde{x} = [x^1, x^2]$, где $x^1 = \|x_{i1}\|$, - минимальный, а $x^2 = \|x_{i2}\|$ - максимальный детерминированные векторы неизвестных, был решением интервальной задачи линейного программирования (4) - (6) в случае (36), необходимо и достаточно, чтобы ее нижняя граничная задача (37) - (39) имела решение x^1, а верхняя граничная задача (40) - (42) – решение x^2 и было выполнено неравенство (25).

Доказательство. В рассматриваемом случае, по условию (6), интервалы $\tilde{x}_i$ значений неизвестных в задаче (4) - (6) неотрицательны, все же перемножаемые интервальные коэффициенты в этой задаче по условию (36) неположительны. Поэтому произведения интервалов в (4), (5) можно выполнить по формуле (12). При этом получим эквивалентную запись (4) - (6) в форме

$$[c_{11}x_{12}, c_{12}x_{11}] + \ldots + [c_{n1}x_{n2}, c_{n2}x_{n1}] \to \max,$$

$$\begin{cases} [a_{11,1}x_{12}, a_{11,2}x_{11}] + \ldots + [a_{1n,1}x_{n2}, a_{1n,2}x_{n1}] \le [b_{11}, b_{12}] \\ \text{----------} \\ [a_{m1,1}x_{12}, a_{m1,2}x_{11}] + \ldots + [a_{mn,1}x_{n2}, a_{mn,2}x_{n1}] \le [b_{m1}, b_{m2}] \end{cases},$$

$$[x_{11}, x_{12}] \ge 0, \ldots, [x_{n1}, x_{n2}] \ge 0.$$

или, после суммирования интервалов по правилу (8), в форме

$$[c_{11}x_{12} + \ldots + c_{n1}x_{n2}, c_{12}x_{11} + \ldots + c_{n2}x_{n1}] \to \max, \quad (43)$$

$$\begin{cases} [a_{11,1}x_{12} + \ldots + a_{1n,1}x_{n2}, a_{11,2}x_{11} + \ldots + a_{1n,2}x_{n1}] \le [b_{11}, b_{12}] \\ \text{----------} \\ [a_{m1,1}x_{12} + \ldots + a_{mn,1}x_{n2}, a_{m1,2}x_{11} + \ldots + a_{mn,2}x_{n1}] \le [b_{m1}, b_{m2}] \end{cases}, \quad (44)$$

$$[x_{11}, x_{12}] \ge 0, \ldots, [x_{n1}, x_{n2}] \ge 0. \quad (45)$$

По правилу (17а) выбора экстремального интервала условие (43) эквивалентно паре условий

$$c_{11}x_{12} + \ldots + c_{n1}x_{n2} \to \max, \quad (46)$$
$$c_{12}x_{11} + \ldots + c_{n2}x_{n1} \to \max, \quad (47)$$

По правилу сравнения интервалов (раздел 3) условия (44) эквивалентны паре условий

$$\begin{cases} a_{11,1}x_{12} + \ldots + a_{1n,1}x_{n2} \le b_{11} \\ \text{----------} \\ a_{m1,1}x_{12} + \ldots + a_{mn,1}x_{n2} \le b_{m1} \end{cases}, \quad (48)$$

$$\begin{cases} a_{11,2}x_{11} + \ldots + a_{1n,2}x_{n1} \le b_{12} \\ \text{----------} \\ a_{m1,2}x_{11} + \ldots + a_{mn,2}x_{n1} \le b_{m2} \end{cases}. \quad (49)$$

По определению неотрицательности интервалов условия (45) эквивалентны паре условий

$$x_{11} \ge 0, \ldots, x_{n1} \ge 0, \quad (50)$$
$$x_{12} \ge 0, \ldots, x_{n2} \ge 0. \quad (51)$$

Так что интервальная задача (4) - (6) эквивалентна двухкритериальной детерминированной задаче (46) - (51). В последней ограничения (48), (51) относятся лишь к критерию оптимизации (46), а ограничения (49), (50) - лишь к критерию (47). Таким образом, интервальная задача линейного программирования (4) - (6) эквивалентна паре детерминированных задач линейного программирования: (47), (49), (50) и (46), (48), (51). Первая из них - это нижняя граничная задача (37) - (39) интервальной задачи (4) - (6), вторая - ее верхняя граничная задача (40) - (42). Сравнив интервальную задачу (4) - (6) и эквивалентную ей пару детерминированных задач (37) - (39) и (40) - (42), видим, что в интервальном решении первой задачи $\tilde{x} = [x^1, x^2]$ детерминированные границы $x^1 = (x_{11}, \ldots, x_{n1})$ и $x^2 = (x_{12}, \ldots, x_{n2})$ - это решения соответственно нижней (37) - (39) и верхней (40) - (42) граничных задач. Из этого, учитывая, что нижняя граница x^1 вектор-интервала $\tilde{x}$ не должна превосходить верхней границы x^2, получаем утверждение теоремы.

Из теоремы 3 вытекает такая теорема существования решения.

Теорема 4. Для того чтобы интервальная задача линейного программирования (4) - (6) в случае (36) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы имели решения $x^1 = \|x_{i1}\|$ и $x^2 = \|x_{i2}\|$ ее нижняя (37) - (39)

и верхняя (40) - (42) граничные задачи и было выполнено неравенство (25).

Алгоритм отыскания решения интервальной задачи линейного программирования (4) - (6) в случае (36) такой же, как в случае (18) (см. параграф 4), только в качестве нижней и верхней граничных задач здесь берутся задачи (37) - (39) и (40) - (42).

6. Детерминизация задачи. Случай 3. Пусть все интервальные коэффициенты в задаче (4) - (6) разнозначны, т. е. эти интервалы содержат в себе нуль

$$\tilde{c}_i = [c_{i1}, c_{i2}], c_{i1} < 0 < c_{i2}, i = \overline{1,n};\ \tilde{a}_{ij} = [a_{ij,1}, a_{ij,2}],$$
$$a_{ij,1} < 0 < a_{ij,2}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \tag{52}$$

Назовем для этого случая первой (второй) верхней граничной задачей интервальной задачи (4)-(6) такую детерминированную задачу линейного программирования, целевая функция которой получена из (4) заменой всех интервальных неизвестных их верхними границами, а всех интервальных коэффициентов - их нижними (верхними) границами. Таким образом, целевые функции первой и второй верхних граничных задач имеют соответственно вид

$$c_{11}x_{12} + \ldots + c_{n1}x_{n2} \to \max, \tag{53}$$
$$c_{12}x_{12} + \ldots + c_{n2}x_{n2} \to \max. \tag{54}$$

Система ограничений обеих этих задач по определению одинакова. Она получается из системы ограничений интервальной задачи (4) - (6) заменой всех интервальных неизвестных их верхними границами, а всех интервальных коэффициентов - сначала их нижними, а затем - верхними границами, с объединением результатов. Таким образом, система ограничений первой (второй) верхней граничной задачи такова

$$\begin{cases} a_{11,1}x_{12} + \ldots + a_{1n,1}x_{n2} \le b_{11} \\ \text{----------} \\ a_{m1,1}x_{12} + \ldots + a_{mn,1}x_{n2} \le b_{m1} \\ a_{11,2}x_{12} + \ldots + a_{1n,2}x_{n2} \le b_{12} \\ \text{----------} \\ a_{m1,1}x_{12} + \ldots + a_{mn,2}x_{n2} \le b_{m2} \end{cases}, \tag{55}$$

$$x_{12} \ge 0, \ldots, x_{n2} \ge 0. \tag{56}$$

Следующая теорема - аналог теорем 1, 3 для рассматриваемого случая.

Теорема 5. Для того чтобы интервальный вектор неизвестных $\tilde{x} = [x^1, x^2]$, где $x^1 = \|x_{i1}\|$ - минимальный, а $x^2 = \|x_{i2}\|$ - максимальный детерминированные векторы неизвестных, был решением интервальной задачи линейного программирования (4) - (6) в случае (52), необходимо и достаточно, чтобы x^2 было общим решением ее первой (53), (55), (56) и второй (54), (55), (56) верхних граничных задач, а x^1 - произвольным вектором, удовлетворяющим неравенству.

$$x^2 \ge x^1 \ge 0. \tag{57}$$

Доказательство. В случае (52) по условию (6) интервалы значений неизвестных в задаче (4)-(6) неотрицательны, а по условию (52) все перемножаемые интервальные коэффициенты в этой задаче разнозначны. При этом произведения интервалов в (4), (5) можно выполнить по третьей формуле (12). В результате получим эквивалентную запись задачи (4) - (6) в виде

$$[c_{11}x_{12}, c_{12}x_{12}] + \ldots + [c_{n1}x_{n2}, c_{n2}x_{n2}] \to \max,$$
$$\begin{cases} [a_{11,1}x_{12}, a_{11,2}x_{12}] + \ldots + [a_{1n,1}x_{n2}, a_{1n,2}x_{n2}] \le [b_{11}, b_{12}] \\ \text{----------} \\ [a_{m1,1}x_{12}, a_{m1,2}x_{12}] + \ldots + [a_{mn,1}x_{n2}, a_{mn,2}x_{n2}] \le [b_{m1}, b_{m2}] \end{cases},$$
$$[x_{11}, x_{12}] \ge 0, \ldots, [x_{n1}, x_{n2}] \ge 0,$$

или, после суммирования интервалов по правилу (8), в виде

$$[c_{11}x_{12} + \ldots + c_{n1}x_{n2}, c_{12}x_{12} + \ldots + c_{n2}x_{n2}] \to \max, \tag{58}$$
$$\begin{cases} [a_{11,1}x_{12} + \ldots + a_{1n,1}x_{n2}, a_{11,2}x_{12} + \ldots + a_{1n,2}x_{n2}] \le [b_{11}, b_{12}] \\ \text{----------} \\ [a_{m1,1}x_{12} + \ldots + a_{mn,1}x_{n2}, a_{m1,2}x_{12} + \ldots + a_{mn,2}x_{n2}] \le [b_{m1}, b_{m2}] \end{cases}, \tag{59}$$
$$[x_{11}, x_{12}] \ge 0, \ldots, [x_{n1}, x_{n2}] \ge 0. \tag{60}$$

По правилу (17а) выбора экстремального интервала условие (58) эквивалентно паре условий

$$c_{11}x_{12} + \ldots + c_{n1}x_{n2} \to \max, \tag{61}$$
$$c_{12}x_{12} + \ldots + c_{n2}x_{n2} \to \max. \tag{62}$$

По правилу сравнения интервалов (раздел 3) условия (59) эквивалентны паре условий

$$\begin{cases} a_{11,1}x_{12} + \ldots + a_{1n,1}x_{n2} \le b_{11} \\ \text{----------} \\ a_{m1,1}x_{12} + \ldots + a_{mn,1}x_{n2} \le b_{m1} \\ a_{11,2}x_{12} + \ldots + a_{1n,2}x_{n2} \le b_{12} \\ \text{----------} \\ a_{m1,2}x_{12} + \ldots + a_{mn,2}x_{n2} \le b_{m2} \end{cases}. \tag{63}$$

Наконец, условия (60) эквивалентны паре условий

$$x_{11} \ge 0, \ldots, x_{n1} \ge 0, \tag{64}$$
$$x_{12} \ge 0, \ldots, x_{n2} \ge 0. \tag{65}$$

Так что интервальная задача (4) - (6) эквивалентна двухкритериальной детерминированной задаче (61) - (65). Последняя распадается на 1) детерминированную задачу (61), (63), (65), имеющую своим решением вектор $x^2 = \|x_{i2}\|$; 2) детерминированную задачу (62), (63), (65), имеющую своим решением тот же вектор $x^2 = \|x_{i2}\|$; 3) систему неравенств (64), определяющую вектор $x^1 = \|x_{i1}\|$ в виде $x^1 \ge 0$. Но задачи (61), (63), (65) и (62), (63), (65) есть первая (53), (55), (56) и вторая (54), (55), (56) верхние граничные задачи интервальной задачи (4) - (6). Таким образом, в интервальном решении $\tilde{x} = [x^1, x^2]$ интервальной задачи (4) - (6) верхняя детерминированная граница $x^2 = \|x_{i2}\|$ есть общее решение ее первой и второй верхних граничных задач, что дает утверждение теоремы относительно x^2. Далее, неравенство $x^1 \ge 0$, с учетом того, что нижняя граница

x^1 вектор-интервал $\tilde{x}$ не должна превосходить его верхней границы x^2, дает утверждение (57) теоремы относительно x^1.

Из теоремы 5 следует такая теорема существования решения.

Теорема 6. Для того чтобы интервальная задача линейного программирования (4) - (6) в случае (52) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы имели общее решение $x^2 = \|x_{i2}\|$ ее первая (53), (55), (56) и вторая (54), (55), (56) верхние граничные задачи. При этом решением задачи (4) - (6) будет любой интервальный вектор $\tilde{x} = [x^1, x^2]$, в котором нижняя x^1 и верхняя x^2 детерминированные границы вектора $\tilde{x}$ удовлетворяют неравенству (57) и x^2 есть указанное общее решение двух задач.

Алгоритм отыскания решения интервальной задачи линейного программирования (4) - (6) в случае (52) таков.

Шаг 1. Отыскание решения $'x^2 = \|x'_{i2}\|$ первой верхней граничной задачи (53), (55), (56) задачи (4) - (6), с использованием какого-либо известного метода решения детерминированных задач линейного программирования, например, симплекс-метод.

Шаг 2. Отыскание решения $''x^2 = \|x''_{i2}\|$ второй верхней граничной задачи (54), (55), (56) задачи (4) - (6), с использованием тех же методов, что и на шаге 1.

Шаг 3. Сравнение $'x^2$ с $''x^2$. Если $'x^2 \neq ''x^2$, то решения задачи (4) - (6) не существует и конец процедуры. Если $'x^2 = ''x^2 = x^2 = \|x_{i2}\|$, то переход к шагу 4.

Шаг 4. Выбираем произвольный вектор $x^1 = \|x_{i1}\|$, удовлетворяющий неравенству (57) (например, вектор $x^1 = 0$). Решением задачи (4) - (6) является интервальный вектор $\tilde{x} = [x^1, x^2]$, где x^2 найден на шаге 3.

Заключение. Полученные в первой части статьи результаты показывают, что разработанный в [10] метод сравнения интервалов и выбора экстремального интервала, использовавшийся вначале для решения недетерминированных задач дискретного программирования, можно успешно применять также для решения недетерминированных непрерывных задач математического программирования. В этом случае сохраняется основное преимущество метода - возможность сведения недетерминированной (интервальной) задачи оптимизации к двум детерминированным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Первозванский А.А.* Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975. 616 с.
2. *Libura M.* Integer programming problems with in exact objective function // Control and Cybern. 1980. V. 9. №4. P. 189-202.
3. *Тимохин С.Г., Шапкин А.В.* О задачах линейного программирования в условиях неточных данных // Экономика и мат. методы. 1981. Т. 17. №5. С. 955-963.
4. *Ватолин А.А.* О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1984. Т. 24. №11. С. 1629-1637.
5. *Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В.* Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования // Кибернетика. 1989. №2. С. 42-46.
6. *Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.* Оптимизация в условиях неопределенности. М.: Изд-во МЭИ; София: Техника, 1989. 226 с.
7. *Семенова Н.В.* Решение одной задачи обобщенного целочисленного программирования // Кибернетика. 1984. №5. С. 25-31.
8. *Jansson Ch., Rump S.* Rigorous solution of linear programming problems with uncertain data // ZOR-Methods and Models of Operations Research. 1991. V. 35. №1. P. 87-111.
9. *Mraz F.* The exact lower bound of optimal values in interval LP // Scientific Computing and Validated Numerics / G.Alefeld, A.Frommer and B.Lang, eds Berlin: Academic Verlag, 1996. P. 214-220.
10. *Левин В.И.* Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. №7. С. 97-106.
11. *Левин В.И.* Булево линейное программирование с интервальными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 1994. №7. С. 111-122.
12. *Юдин Д.Б., Гольдштейн Е.Г.* Задачи и методы линейного программирования. М.: Советское радио, 1964. 736 с.
13. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.

Поступила в редакцию 10 июля 1998 г.