УДК 681.5.09

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ. I. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

© В.И. Левин

Ключевые слова: логические определители; их свойства; раскрытие; проблема размерности; надежность.

Описаны логические определители, служащие математическим аппаратом для моделирования надежности сложных систем.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] были предложены автоматно-логические модели и методы анализа надежности технических систем, основанные на математическом аппарате двузначной (булевой) и бесконечнозначной (непрерывной) логики (НЛ). Было показано, что предложенные модели и методы позволяют анализировать надежность, в принципе, любых систем в аналитической форме, что имеет большое теоретическое и практическое значение. Однако попытки непосредственного применения предложенного подхода к сложным системам, у которых логические схемы-модели сложны, а их входные процессы имеют большое число последовательных изменений сигнала (что является следствием многоразового восстановления блоков системы), наталкиваются на очень большие трудности. Эти трудности обусловлены необозримостью получаемых выражений и большой сложностью их вычисления.

В данной работе предложен другой подход к анализу надежности сложных систем, основанный на математическом аппарате логических определителей (ЛО), вводимых как числовые характеристики некоторых квазиматриц, вычисляемые по соответствующим формулам алгебры НЛ [2]. В целом квазиматрицы и ЛО в рассматриваемой области играют ту же роль параметров укрупненного (блочного) описания изучаемых нелинейных систем, что и обычные матрицы и определители в области линейных систем, т. е. способствуют лучшей обозримости и вычислимости различных характеристик изучаемых технических систем. В нашем случае это характеристики надежности.

1. ПОРЯДКОВАЯ ЛОГИКА И ЛОГИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. Рассмотрим множество $X=\{x_1,...,x_n\}$ из n элементов x_i, $x_i \in [A,B]$. Расположим элементы в порядке неубывания:

$$x^{(1)} \le x^{(2)} \le ... \le x^{(n)},\;\; x^{(r)} \in X \;. \qquad (1)$$

Введем над множеством X операцию выделения произвольного порядкового элемента $x^{(r)}$ этого множества (r *-операцию*):

$$y \equiv f^{(r)}(x_1,...,x_n) = x^{(r)}, \quad r=1,...,n\,. \qquad (2)$$

Здесь r называется *рангом* операции. Легко видеть, что r-операция обобщает операции конъюнкции $\wedge = \min$ и дизъюнкции $\vee = \max$ непрерывной логики (НЛ) [1], переходя в них соответственно при $r=1$ и $r=n$.

Результатом r-операции над элементами множества является один из элементов этого же множества. Назовем произвольную функцию, аргументы которой $x_1,...,x_n$ взяты из множества X и которая представляется в виде суперпозиции r-операций над X с различными значениями ранга r, *функцией порядковой логики.* Простейший пример такой функции – сама r-функция (2). Более сложный пример – функция $y=f^{(2)}[f^{(2)}(x_1,x_2,x_3),\, f^{(3)}(x_1,x_2,x_3,x_4)]$.

Любая функция порядковой логики $y=f(x_1,...,x_n)$ на любом наборе аргументов $(x_1,...,x_n)$ принимает значение одного из аргументов.

Это связано с тем, что r-операции, суперпозицией которых представляется выражение y, всегда имеют своим результатом одну из переменных, участвующих в операциях.

Задать функцию порядковой логики $y=f(x_1,...,x_n)$ можно, перечислив все $n!$ вариантов упорядочения аргументов $x_1,...,x_n$ и указав для каждого варианта аргумент x_i, значение которого принимает функция. Такое задание функции порядковой логики есть частный случай первичного задания любой функции непрерывной логики [1].

Поэтому от такого первичного задания функции порядковой логики можно перейти к ее аналитическому представлению с помощью суперпозиции операций НЛ – конъюнкции и дизъюнкции (отрицание при этом не участвует, т. к. r-операция всегда имеет своим результатом значение одной из переменных, но не ее отрицания). Методика перехода та же, что и для функций НЛ.

Пример 1. Функция порядковой логики $y = f^{(2)}(x_1, x_2, x_3)$ – медиана – задана с помощью табл. 1. Найти ее представление с помощью НЛ.

Таблица 1

Упорядочение аргументов	Значение функции	Упорядочение аргументов	Значение функции
$x_1 \le x_2 \le x_3$	x_2	$x_2 \le x_3 \le x_1$	x_3
$x_1 \le x_3 \le x_2$	x_3	$x_3 \le x_1 \le x_2$	x_1
$x_2 \le x_1 \le x_3$	x_1	$x_3 \le x_2 \le x_1$	x_2

Согласно табл. 1, искомую функцию можно представить так:

$$y = \begin{cases} x_1 \text{ при } x_2 \le x_1 \le x_3 \text{ или } x_3 \le x_1 \le x_2; \\ x_2 \text{ при } x_1 \le x_2 \le x_3 \text{ или } x_3 \le x_2 \le x_1; \\ x_3 \text{ при } x_1 \le x_3 \le x_2 \text{ или } x_2 \le x_3 \le x_1. \end{cases}$$

Объединим при помощи конъюнкции НЛ 1-ю строку при 2-м условии со 2-й строкой при 2-м условии, 1-ю строку при 1-м условии с 3-й строкой при 2-м условии и 2-ю строку при 1-м условии с 3-й строкой при 1-м условии:

$$y = \begin{cases} x_1x_2 \text{ при } x_1x_2 \ge x_3 \text{ (т.е. при } x_1x_2 \ge x_1x_3, x_2x_3); \\ x_1x_3 \text{ при } x_1x_3 \ge x_2 \text{ (т.е. при } x_1x_3 \ge x_1x_2, x_2x_3); \\ x_2x_3 \text{ при } x_2x_3 \ge x_1 \text{ (т.е. при } x_2x_3 \ge x_1x_2, x_1x_3). \end{cases}$$

Объединяя теперь три строки в одну с помощью операции дизъюнкции НЛ, получаем искомое представление $y = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$.

Из сказанного следует, что функции порядковой логики – отдельный класс функций НЛ. Поэтому выражения функций порядковой логики можно подвергать эквивалентным преобразованиям (с целью их упрощения) с помощью законов НЛ [1]. Однако некоторые законы присущи лишь порядковой логике:

тавтология

$$f^{(r)}(x, \ldots, x) = x; \tag{3}$$

переместительный

$$f^{(r)}(x_1, \ldots, x_n) = f^{(r)}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}), \quad x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \text{ – любая перестановка } x_1, \ldots, x_n \tag{4}$$

распределительный

$$f^{(r)}[\varphi^{(q_1)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi^{(q_p)}(x_1, \ldots, x_n)] = \varphi^{(q_r)}(x_1, \ldots, x_n), \quad q_1 < \ldots < q_p;\ 1 \le r \le p \tag{5}$$

и его частные случаи

$$\bigwedge_{i=1}^{n} f^{(r_i)}(x_1, \ldots, x_n) = f^{\left(\bigwedge_{i=1}^{n} r_i\right)}(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\bigvee_{i=1}^{n} f^{(r_i)}(x_1, \ldots, x_n) = f^{\left(\bigvee_{i=1}^{n} r_i\right)}(x_1, \ldots, x_n). \tag{6}$$

При помощи этих законов можно преобразовывать представления функций порядковой логики, не являющиеся выражениями НЛ.

2. Рассмотрим множество X_q, состоящее из q непересекающихся подмножеств $(x_{i_1}, \ldots, x_{im_i})$, $i = 1, \ldots, q$, с элементами $x_{ij} \in [A, B]$, упорядоченными согласно

$$x_{i_1} \le x_{i_2} \le \ldots \le x_{im_i}, \quad i = 1, \ldots, q. \tag{7}$$

Число элементов этого множества $n = \sum_{i=1}^{q} m_i$. Множество X_q частично упорядоченное; его удобно записывать в виде *квазиматрицы* q-го порядка со строками – упорядоченными подмножествами

$$\boldsymbol{X}_q = \left\| \begin{matrix} x_{11} \ldots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{matrix} \right\| = \|x_{ij}\|, \quad i = 1, \ldots, q; \ j = 1, \ldots, m_i. \tag{8}$$

Квазиматрица (8) отличается от обычной матрицы неодинаковым числом элементов в различных строках и упорядоченностью элементов в строках согласно формуле (7). Рассмотренное выше неупорядоченное множество $X = (x_1, \ldots, x_n)$ представляет собой частный случай множества (8) при n строках из одного элемента каждая. Поэтому множество X можно записать в виде *матрицы-столбца*

$$\boldsymbol{X}_n = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \hdashline x_n \end{matrix} \right\|. \tag{9}$$

В другом частном случае, когда множество X_q полностью упорядочено, оно содержит лишь одно упорядоченное подмножество (одну строку в (8)). При этом матричная запись множества X_q имеет вид *матрицы-строки*

$$\boldsymbol{X}_n = \|x_1, \ldots, x_n\|. \tag{10}$$

Для частично упорядоченного множества X_q с квазиматрицей (8), как и для упорядоченного множества X, вводится r-операция (2) в виде функции

$$y \equiv f^{(r)}(x_{11}, \ldots, x_{qm_q}) = x^{(r)}, \quad r = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

выделяющей нужный порядковый элемент $x^{(r)}$ из X_q. Введенная функция называется *логическим определителем* (ЛО) r-го ранга q-го порядка от квазиматрицы $X_q = \|x_{ij}\|$ и обозначается

$$X_q^r = \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \left| x_{ij} \right|^{(r)}, \quad r = 1,\dots,n. \tag{12}$$

Специально отметим некоторые частные случаи введенных выше логических определителей – *определитель-столбец*

$$X_n^r = \begin{vmatrix} x_1 \\ \hdashline x_n \end{vmatrix}^{(r)}, \; r = 1,\dots,n. \tag{13}$$

соответствующий матрице-столбцу (9) и совпадающий с обычной r-функцией вида (2), и *определитель-строку*

$$X_1^r = \left| x_1,\dots,x_n \right|^{(r)} = x_r, \quad r = 1,\dots,n, \tag{14}$$

соответствующий матрице-строке (10). Логический определитель X_q^r от квазиматрицы X_q является числовой характеристикой этой квазиматрицы, как обычный определитель (детерминант) есть характеристика квадратной матрицы. Формально ЛО – это обобщение обычной r-функции (2) на случай частично упорядоченного множества аргументов, сохраняющее все основные черты r-функции. Так, любой ЛО $X_q^r = \left| x_{ij} \right|^{(r)}$ на любом наборе элементов $x_{11},\dots,x_{qm_q}$ принимает значение одного из элементов. Далее, любая функция, аргументы которой – элементы $x_{11},\dots,x_{qm_q}$ квазиматрицы X_q и которая представлена в виде суперпозиции логических определителей X_q^r различных рангов r от X_q есть функция порядковой логики. Так что ЛО и суперпозицию ЛО можно задать, указав для каждого варианта упорядочения элементов $x_{11},\dots,x_{qm_q}$ элемент x_{ij}, значение которого принимает функция. От такого задания логических определителей можно перейти к их аналитическому представлению с помощью операций НЛ (пример 1). Значит, ЛО и их суперпозиции образуют специальный класс функций НЛ. Их можно подвергать эквивалентным преобразованиям с помощью законов НЛ [1] и порядковой логики (3)–(6).

2. СВОЙСТВА ЛОГИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Свойство 1. ЛО является монотонно неубывающей функцией ранга

$$X_q^r \ge X_q^p, \quad \text{если } r > p. \tag{15}$$

Свойство 2. Перестановка любых 2 строк ЛО X_q^r не меняет его значения.

Доказательства свойств 1, 2 вытекают из определения X_q^r.

Свойство 3. Общее для всех элементов определителя слагаемое можно вынести за знак ЛО:

$$\left| x_{ij} + c \right|^{(r)} = \left| x_{ij} \right|^{(r)} + c. \tag{16}$$

Доказательство: прибавление общего слагаемого ко всем элементам x_{ij} не меняет их взаимной упорядоченности согласно (7).

Свойство 4. Общий для всех элементов дизъюнктивный (конъюнктивный) член можно вынести за знак ЛО:

$$\left| x_{ij} \vee c \right|^{(r)} = \left| x_{ij} \right|^{(r)} \vee c; \quad \left| x_{ij} \wedge c \right|^{(r)} = \left| x_{ij} \right|^{(r)} \wedge c. \tag{17}$$

Доказательство следует из того, что введение общего для всех элементов дизъюнктивного (конъюнктивного) члена c не вменяет взаимной упорядоченности элементов, а лишь приводит к замене на c тех из них, которые вначале были меньше (больше) c.

Свойство 5. Общий для всех элементов сомножитель c можно вынести за знак ЛО с сохранением первоначального ранга r, если $c > 0$, и с заменой его на дополнительный ранг $n - r + 1$ при $c < 0$:

$$\left| x_{ij} c \right|^{(r)} = \begin{cases} c \left| x_{ij} \right|^{(r)}, & c > 0 \\ c \left| x_{ij} \right|^{(n-r+1)}, & c < 0 \end{cases} \tag{18}$$

Доказательство. При $c > 0$ упорядоченность значений $x_{ij}c$ и x_{ij} ($i = 1,\dots,q$; $j = 1,\dots,m_i$) одинаковая, а при $c < 0$ – обратная (максимальному x_{ij} соответствует минимальное $x_{ij}c$ и т.д.).

Свойство 6. Если $c > x_{im_i}$ $(i = 1,\dots,q)$, то значение ЛО не меняется при добавлении к нему справа столбца из элементов c:

$$\begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \; c \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \; c \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)}, & r = 1,\dots,n; \\ c, & r = n+1,\dots,n+q. \end{cases} \tag{19}$$

Свойство 7. При добавлении к ЛО столбца из c; при $c < x_{i1}$ $(i = 1,\dots,q)$ значение ЛО не изменится, если его ранг уменьшить на число строк:

$$\begin{vmatrix} c \;\; x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline c \;\; x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} c, & r = 1,\dots,q; \\ \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r-q)}, & r = q+1,\dots,q+n. \end{cases} \tag{20}$$

Свойство 8. Значение ЛО не меняется при исключении элемента ∞ (бесконечность) в конце какой-либо строки:

$$\left|\begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \ \infty \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \begin{cases} \left|\begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)}, & r = 1,\dots,n; \\ \infty, & r = n+1. \end{cases} \quad (21)$$

Свойство 9. Значение ЛО не меняется, если из него исключить, элемент $-\infty$ в начале какой-либо строки, а ранг уменьшить на единицу:

$$\left|\begin{matrix} -\infty \, x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \begin{cases} -\infty, & r = 1,\dots,q; \\ \left|\begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r-1)}, & r = q+1,\dots,q+n. \end{cases} \quad (22)$$

Доказательства свойств 6–9 вытекают из определения ЛО.

Свойство 10. Значение ЛО не изменится, если любую совокупность строк заменить ЛО, образованными этой совокупностью и расположенными в одной строке в порядке возрастания ранга:

$$X_q^r = \left|\begin{matrix} X_{q\backslash i\dots k} \\ \hdashline X_{i\dots k}^1 X_{i\dots k}^2 \dots X_{i\dots k}^N \end{matrix}\right|^{(r)}. \quad (23)$$

Здесь $X_{q\backslash i\dots k}$ – квазиматрица, полученная из квазиматрицы X_q исключением строк $i,\dots,k$; $X_{i\dots k}^p = \left|\begin{matrix} i \\ \hdashline k \end{matrix}\right|^p$ – ЛО p-го ранга из строк $i,\dots,k$.

Доказательство. Указанная замена означает совместное упорядочение элементов строк $i,\dots,k$ и не влияет на значение порядкового элемента $x^{(r)}$ множества X_q следовательно, и на значение X_q^r.

Свойство 11. ЛО q-го порядка с двумя одинаковыми строками представим как ЛО $(q-1)$-го порядка с различными строками:

$$\left|\begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q-1,1} \dots x_{q-1,m_{q-1}} \\ x_{q-1,1} \dots x_{q-1,m_{q-1}} \end{matrix}\right|^{(r)} = \left|\begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q-1,1} x_{q-1,1} \dots x_{q-1,m_{q-1}} x_{q-1,m_{q-1}} \end{matrix}\right|^{(r)} \quad (24)$$

Доказательство. Такая перестановка удовлетворяет условию упорядоченности элементов в строках (7), т. е. снова дает логический определитель, причем не меняет его значения.

Свойство 12. Конечный ЛО можно представить как бесконечный:

$$\left|\begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \left|\begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \ \infty\infty\dots \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \ \infty\infty\dots \end{matrix}\right|^{(r)}. \quad (25)$$

Доказательство данного свойства получаем повторным применением (21). Бесконечности в (25) можно заменить конечными элементами $x_{ik}, k > m_i$, такими, чтобы сохранилась упорядоченность (7) элементов в строках и выполнялись неравенства $x_{ik} \geq \bigvee_{i=1}^{q} x_{im_i}$, $i = 1,\dots,q$.

Свойство 13. Значение ЛО r-го ранга не изменится, если в любой i-й строке исключить элементы $x_{i,r+1}; x_{i,r+2}\dots$:

$$\left|\begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \left|\begin{matrix} x_{11} \dots x_{1r_1} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qr_q} \end{matrix}\right|^{(r)}, \quad \text{где } r_i = r \wedge m_i \quad (26)$$

Доказательство. Действительно, r-м порядковым элементом $x^{(r)}$ квазиматрицы X_q может быть только один из r первых элементов какой-либо ее строки.

Свойство 14 *(закон тавтологии)*:

$$\left|\begin{matrix} x \dots x \\ \hdashline x \dots x \end{matrix}\right|^{(r)} = x, \quad r = 1,\dots,n. \quad (27)$$

Доказательство следует из определения ЛО.

Свойство 15 *(распределительный закон)*:

$$\left|\begin{matrix} X_q^{p_{11}} \dots X_q^{p_{1m_1}} \\ \hdashline X_q^{p_{s1}} \dots X_q^{p_{sm_s}} \end{matrix}\right|^{(r)} = X_q^{P_s^r}, \quad \text{где } P_s^r = \left|\begin{matrix} p_{11} \cdots p_{1m_1} \\ \hdashline p_{s1} \cdots p_{sm_s} \end{matrix}\right|^{(r)}. \quad (28)$$

Здесь

$$p_{i_1} < p_{i_2} < \dots < p_{im_i}, \ r = 1,2,\dots,n, \ n = \sum_{i=1}^{s} m_i.$$

Свойство 16 *(частный случай распределительного закона)*:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} X_q^{p_i} = X_q^{\bigwedge_{i=1}^{n} p_i}. \quad (29)$$

Свойство 17 *(частный случай распределительного закона):*

$$\bigvee_{i=1}^{n} X_q^{p_i} = X_q^{\bigvee_{i=1}^{n} p_i} \quad (30)$$

Доказательство свойств 15–17 вытекает из свойства 1. По нему упорядочение множества ЛО X_q^r различных рангов r от одной квазиматрицы X_q можно заменить упорядочением множества рангов.

3. РАСКРЫТИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Раскрыть ЛО – значит указать аналитическое представление функции НЛ, выражающей значение ЛО через значения его элементов. В § 1 был предложен прямой метод раскрытия ЛО. Однако этот метод громоздок и не работает в случае больших ЛО. Удобнее раскрывать ЛО по готовым формулам, дающим аналитическое представление функции НЛ, выражающей значения целого класса ЛО.

1. ЛО-столбец r-го ранга с n элементами выражается ДНФ

$$X_n^r = \begin{vmatrix} x_1 \\ \hdashline x_n \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{i_1 \neq \ldots \neq i_{n-r+1}} (x_{i_1} \ldots x_{i_{n-r+1}}), \ x_{i_k} \in \{x_1, \ldots, x_n\} \quad (31)$$

или такой КНФ:

$$X_n^r = \begin{vmatrix} x_1 \\ \hdashline x_n \end{vmatrix}^{(r)} = \bigwedge_{i_1 \neq \ldots \neq i_r} (x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}), \ x_{i_k} \in \{x_1, \ldots, x_n\}. \quad (32)$$

Доказательство (31). Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ – упорядоченные согласно (1) элементы $x_1, \ldots, x_n$. Каждая конъюнкция состоит из $n-r+1$ различных элементов. Одна конъюнкция вида $b = x^{(r)} x^{(r+1)} \ldots x^{(n)}$, остальные вида $b_i = x^{(s)} b_i'$, где $s < r$, т. е. $b = x^{(r)}$, $b_i \le x^{(r)}$ и правая часть выражения (31) равна $x^{(r)}$ т.е. левой части. Формула (32) доказывается аналогично.

2. Общий бесконечный ЛО r-го ранга q-порядка выражается ДНФ:

$$X_q^r = \begin{vmatrix} x_{11} \ldots x_{1i_1} \ldots \\ \hdashline x_{21} \ldots x_{qi_q} \ldots \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{\sum_{s=1}^{q} i_s = r+q-1} (x_{1i_1} \ldots x_{qi_q}). \quad (33)$$

Доказательство. Сначала докажем частный случай (33) при $q = 2$.

$$X_2^r = \begin{vmatrix} x_{11} \ldots x_{1i_1} \ldots \\ \hdashline x_{21} \ldots x_{2i_2} \ldots \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{k=1}^{r} (x_{1k} x_{2,r+1-k}). \quad (34)$$

ЛО X_2^r согласно свойству 13 можно представить как конечный ЛО:

$$X_2^r = \begin{vmatrix} x_{11} \ldots x_{1r} \\ \hdashline x_{21} \ldots x_{2r} \end{vmatrix}^{(r)}, \quad (35)$$

который, не учитывая упорядоченности в строках, представим как ЛО-столбец

$$X_2^r = \begin{vmatrix} x_{11} \\ \hdashline x_{1r} \\ x_{21} \\ \hdashline x_{2r} \end{vmatrix}^{(r)}. \quad (36)$$

Раскроем ЛО (36) по формуле (31). Каждая конъюнкция в (31) включает $r+1$ различных элементов. Из этих элементов хотя бы один вида x_{1i} и хотя бы один вида x_{2j}. Пусть B_{ks} – s-я из конъюнкций, включающих k элементов вида x_{2j} и $r+1-k$ элементов вида x_{1i}. Тогда, согласно (31), $X_2^r = \bigvee_{k=1}^{r} \bigvee_{s} B_{ks}$. При фиксированном k по условию (7) максимальна та конъюнкция B_{ks} ($s = 1,2,\ldots$), в которую входят элементы $x_{1k}, \ldots, x_{1r}; x_{2,r+1-k}, \ldots, x_{2r}$: она равна $x_{1k} x_{2,r+1-k}$. Отсюда следует, что $\bigvee_{s} B_{ks} = x_{1k} x_{2,r+1-k}$. Подставив это в выражение X_2^r, получим (34).

Теперь формулу (33) докажем индукцией по q. При $q = 1$ (33) переходит в установленное ранее (см. (14)) равенство $X_1^r = \left| x_{11} \ldots x_{1i_1} \ldots \right|^{(r)} = x_{1r}$, а при $q = 2$ – в уже доказанное соотношение (34). Допустим, что формула (33) верна для некоторого $q = p$. Докажем, что тогда она верна и при $q = p+1$. Представим X_{p+1}^r по правилу (23) в виде блочного определителя 2-го порядка:

$$X_{p+1}^r = \begin{vmatrix} x_{11} \ldots x_{1i_1} \ldots \\ \hdashline x_{p1} \ldots x_{pi_p} \ldots \\ x_{p+1,1} \ldots x_{p+1,i_{p+1}} \ldots \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{vmatrix} X_p^1 \ldots X_p^{i_1} \ldots \\ x_{p+1,1} \ldots x_{p+1,i_{p+1}} \ldots \end{vmatrix}^{(r)}.$$

Раскроем последний по формуле (34) $X_{p+1}^r = \bigvee_{k=1}^{r} X_p^k x_{p+1,r+1-k}$.

Согласно вышеуказанному допущению, ЛО X_p^k можно выразить в виде (33). Отсюда следует

$$X_{p+1}^r = \bigvee_{k=1}^{r} \left(\bigvee_{\sum_{s=1}^{p} i_s = k+p-1} x_{1i_1} \ldots x_{pi_p} \right) x_{p+1,r+1-k} =$$

$$= \bigvee_{k=1}^{r} \bigvee_{\sum_{s=1}^{p+1} i_s = r+p} x_{1i_1} \ldots x_{pi_p} x_{p+1,r+1-k} =$$

$$= \bigvee_{\substack{\sum_{s=1}^{p+1} i_s = r+p, \\ 1 \le i_{p+1} \le r}} a_{1i_1} \ldots a_{p+1,i_{p+1}}.$$

В последнем выражении по свойству 13 можно опустить условие $1 \le i_{p+1} \le r$, не изменив значение

ЛО. В итоге получим $X_{p+1}^{r} = \bigvee\limits_{\sum_{s=1}^{p+1} i_s = r+p} x_{1i_1} \ldots x_{p+1,i_{p+1}}$, что и требовалось доказать.

3. Общий конечный ЛО r-го ранга q-го порядка выражается такой ДНФ:

$$X_q^r = \left| \begin{matrix} x_{11} \ldots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{matrix} \right|^{(r)} = \bigvee_{\sum_{s=1}^{q} i_s = r+q-1} \left(\overset{m_1}{\breve{x}_{1i_1}} \ldots \overset{m_q}{\breve{x}_{qi_q}} \right). \qquad (37)$$

Здесь и ниже запись $\overset{m_1}{\breve{x}_{1i_1}}$ означает, что элемент x_{ki_k} исключается из тех конъюнкций, для которых из условия на $\sum i_s$ формально получается $i_k > m_k$.

Доказательство формулы (37) получается, если в соответствии с (25) представить конечный ЛО X_q^r как бесконечный и применить к последнему правило раскрытия (33), учитывая, что $x \wedge \infty = x$.

Пример 2. По формуле (31) раскроем ЛО-столбец

$$X_3^r = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} x_1 x_2 x_3, & r = 1, \\ x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3, & r = 2, \\ x_1 \vee x_2 x_3, & r = 3. \end{cases}$$

Второе из выписанных выражений получено более сложным путем – с использованием прямого метода в примере 1.

Пример 3. По формуле (37) раскроем общий ЛО 2-го порядка

$$X_3^r = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} x_{11} x_{21}, & r = 1, \\ x_{11} x_{22} \vee x_{12} x_{21}, & r = 2, \\ x_{12} x_{22} \vee x_{11} x_{21}, & r = 3, \\ x_{12} x_{22}, & r = 4. \end{cases}$$

4. РАСКРЫТИЕ БОЛЬШИХ ЛОГИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Раскрытие больших ЛО (т. е. ЛО с большим числом элементов) по явным формулам § 3 слишком трудоемко. В таких случаях целесообразнее применять *разложения* ЛО на ЛО меньших размеров. Простейшее такое разложение – (23).

Пример 4. Раскроем ЛО 4-го порядка

$$X_4^4 = \begin{vmatrix} x_{11} x_{12} \\ x_{21} x_{22} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{vmatrix}^{(4)}.$$

Запишем данный ЛО как блочный ЛО 2-го порядка, объединив 1-ю строку со 2-й и 3-ю с 4-й:

$$X_2^4 = \begin{vmatrix} B_2^1 & B_2^2 & B_2^3 & B_2^4 \\ C_2^1 & C_2^2 & & \end{vmatrix}^{(4)};$$

где $B_2^r = \begin{vmatrix} x_{11} x_{12} \\ x_{21} x_{22} \end{vmatrix}^{(r)}$, $r = 1,\ldots,4$; $C_2^r = \begin{vmatrix} x_{31} \\ x_{41} \end{vmatrix}^{(r)}$, $r = 1,2$.

Раскроем теперь ЛО X_2^4 по (37): $X_2^4 = B_2^2 \vee \vee B_2^3 C_2^2 \vee B_2^4 C_2^1$. Остается подставить сюда выражения B_2^r из примера 3 и значение определителя C_2^r:

$$C_2^r = \begin{cases} x_{31} x_{41}, & r = 1; \\ x_{31} \vee x_{41}, & r = 2. \end{cases}$$

Окончательно получаем выражение ЛО, сложность которого – 13 двухместных операций $\vee$ и $\wedge$ НЛ:

$$X_2^4 = x_{11} x_{22} \vee x_{12} x_{21} \vee (x_{12} x_{22} \vee x_{11} \vee x_{21}) \wedge \\ \wedge (x_{31} \vee x_{41}) \vee (x_{12} \vee x_{22}) \wedge x_{31} x_{41}.$$

Раскрытие этого ЛО по (37) дает выражение

$$X_2^4 = x_{11} x_{22} \vee x_{12} x_{21} \vee x_{11} x_{31} \vee x_{11} x_{41} \vee x_{21} x_{31} \vee x_{21} x_{41} \vee \\ \vee x_{12} x_{22} x_{31} \vee x_{12} x_{22} x_{41} \vee x_{12} x_{31} x_{41} \vee x_{22} x_{31} x_{41},$$

сложность которого – 23 операции. Более конкретные правила разложения ЛО, когда однозначно указываются блоки, на которые разлагается ЛО, даны ниже.

2. Назовем *логическим дополнением* элемента x_{ij} в ЛО X_q^r ЛО, полученный из X_q^r исключением элемента x_{ij}. Обозначим его $X_q^r \setminus x_{ij}$. ЛО-столбец r-го ранга с n элементами можно разложить поэлементно по такой ДНФ:

$$X_n^r = \left| \begin{matrix} x_1 \\ \hdashline x_n \end{matrix} \right|^{(r)} = \bigvee_{i=1}^{n} x_i X_n^r \setminus x_i. \qquad (38)$$

Доказательство. Раскрыв ЛО $X_n^r \setminus x_i$ в правой части по правилу (31), получим раскрытый по этому правилу ЛО левой части X_n^r.

Общий ЛО r-го ранга q-го порядка можно разложить поэлементно по ДНФ:

$$X_q^r = \left| \begin{matrix} x_{11} \ldots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{matrix} \right|^{(r)} = \bigvee_{i,j} x_{ij} X_q^r \setminus x_{ij}. \qquad (39)$$

Доказательство. Рассматривая ЛО X_q^r без учета упорядоченности элементов в строках (т. е. как ЛО-столбец), применяем к нему формулу (38).

Формулы (38), (39) задают разложения ЛО по элементам.

3. Пусть $X_q^r = \left|\begin{matrix} x_{11}\ldots x_{1i_1}\ldots \\ \hdashline x_{q1}\ldots x_{qi_q}\ldots \end{matrix}\right|^{(r)}$ – общий бесконечный ЛО r-го ранга q-го порядка, а $X_{d,b}^s$ – это блок-ЛО s-го ранга, составленный из строк $d, d+1, \ldots, b$ ЛО X_q^r. Справедливо разложение ЛО по блокам:

$$X_q^r = \bigvee_{\sum_{i=1}^{p} s_i = r+p-1} X_{1,k_1}^{s_1} X_{k_1+1,k_2}^{s_2} \ldots X_{k_{p-1}+1,q}^{s_p}. \qquad (40)$$

Доказательство. Представим X_q^r в блочном виде (23):

$$X_q^r = \left|\begin{matrix} X_{1,k_1}^1 \ldots X_{1,k_1}^{i_1} \ldots \\ X_{k_1+1,k_2}^1 \ldots X_{k_1+1,k_2}^{i_2} \ldots \\ \hdashline X_{k_{p-1}+1,q}^1 \ldots X_{k_{p-1}+1,q}^{i_p} \ldots \end{matrix}\right|^{(r)}.$$

Рассматривая теперь блоки $X_{d,b}^s$ как элементы ЛО X_q^r, раскроем его по (33). В результате получим (40).

Пусть $X_q^r = \left|\begin{matrix} x_{11}\ldots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1}\ldots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)}$ – общий конечный ЛО r-го ранга q-го порядка, а $X_{d,b}^s$ означает то же, что и выше. Тогда справедливо разложение ЛО по блокам:

$$X_q^r = \bigvee_{\sum_{i=1}^{p} s_i = r+p-1} \overset{M_1}{\breve{X}}{}_{1,k_1}^{s_1} \overset{M_2}{\breve{X}}{}_{k_1+1,k_2}^{s_2} \ldots \overset{M_p}{\breve{X}}{}_{k_{p-1}+1,q}^{s_p}. \qquad (41)$$

В формуле (41) M_i – это число элементов в соответствующем блок-ЛО $X_{d,b}^{s_i}$, а запись $\overset{M_i}{\breve{X}}{}_{d,b}^{s_i}$ означает, что ЛО $X_{d,b}^{s_i}$ не входит в те конъюнкции, для которых из условия на $\sum s_i$ получается $s_i > M_i$.

Доказательство формулы (41) повторяет доказательство разложения (40), но с раскрытием ЛО по (37).

4. Разложения (23), (38)–(41) составляют основу *иерархических процедур раскрытия* ЛО. В каждой такой процедуре первый шаг – это разложение вычисляемого ЛО $X_q^r = |X_{ij}|_q^r$ по одной из формул (23), (38)–(41) на блоки-ЛО низшего порядка; второй шаг – разложение получившихся ЛО на определители еще более низкого порядка и т.д., пока не придем к выражению исходного ЛО через определители 1-го порядка, т.е. собственно элементы x_{ij}. Иерархическая процедура раскрытия ЛО показана выше в примере 4.

Трудоемкость такой процедуры и сложность получаемого выражения ЛО зависят от формулы разложения ЛО и способа его разделения на блоки. Наибольший эффект достигается при использовании поблочных разложений с делением на каждом шаге имеющихся ЛО на два равновеликих.

При этом формулы разложения бесконечного (40) и конечного (41) ЛО принимают соответственно вид:

$$X_q^r = \bigvee_{i+j=r+1} X_{1,]q/2[}^{i} X_{]q/2[+1,q}^{j}, \qquad (42)$$

$$X_q^r = \bigvee_{i+j=r+1} \overset{M_1}{\breve{X}}{}_{1,]q/2[}^{i} \overset{M_2}{\breve{X}}{}_{]q/2[+1,q}^{j}. \qquad (43)$$

$(\,]a[\,$ – целая часть $a)$

Получаемые по ним выражения ЛО обладают соответственно сложностью

$$\tilde{N}_q^r = r^2(q-1) + 2r - 1, \qquad (44)$$

$$N_q^r = krn, \quad k \le 2 \ \ (k - \text{const}). \qquad (45)$$

Оценка (45) получена в предположении одинакового числа элементов m во всех q строках ЛО; в ней n – общее число элементов $(n = mq)$. Использование дихотомических блочных разложений (42), (43) обеспечивает раскрытие достаточно больших ЛО с приемлемой сложностью вычислений.

5. При раскрытии особенно больших ЛО получаемые с помощью разложений (42), (43) выражения ЛО могут оказаться недопустимо сложными. В таких случаях целесообразно приближенное раскрытие ЛО, основанное на получении двусторонних аналитических оценок величины ЛО. Эти оценки имеют следующий вид: для ЛО-столбца

$$\begin{gathered}(x_1 \ldots x_{n-r+1}) \vee (x_{n-r+2} \ldots x_{2(n-r+1)}) \vee \ldots \vee \\ \vee (x_{(M_1-1)(n-r+1)} \ldots x_{M_1(n-r+1)}) \vee (x_r \ldots x_n) \le \left|\begin{matrix} x_1 \\ \hdashline x_n \end{matrix}\right|^{(r)} \le \\ \le (x_1 \vee \ldots \vee x_r) \wedge (x_{r+1} \vee \ldots \vee x_{2r}) \wedge \ldots \wedge \\ \wedge (x_{(M_2-1)r+1} \vee \ldots \vee x_{M_2 r}) \wedge (x_{n-r+1} \vee \ldots \vee x_n),\end{gathered} \qquad (46)$$

где $M_1 =]n/(n-r+1)[, \ M_2 =]n/r[$; для общего бесконечного ЛО

$$x_{1l} \wedge \ldots \wedge x_{ql} \le \left|\begin{matrix} x_{11}\ldots x_{1i_1}\ldots \\ \hdashline x_{q1}\ldots x_{qi_q}\ldots \end{matrix}\right|^{(r)} \le x_{1l} \vee \ldots \vee x_{ql}, \qquad (47)$$

где $l = [r/q]$ и $[\cdot]$ – символ округления до ближайшего большего целого числа; для общего конечного ЛО

$$\overset{m_1}{\breve{x}}{}_{1d_1} \wedge \ldots \wedge \overset{m_q}{\breve{x}}{}_{qd_q} \le \left|\begin{matrix} x_{11}\ldots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1}\ldots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} \le x_{1l_1} \vee \ldots \vee x_{ql_q}, \qquad (48)$$

где

$$d_p = \left]\frac{(q+r-1)m_p}{\sum_{i=1}^{q} m_i}\right[, \quad l_p = \left[\frac{rm_p}{\sum_{i=1}^{q} m_i}\right], \quad p = 1,\dots,q.$$

Приведенные оценки позволяют получать приближенные выражения ЛО со сложностью, пропорциональной размерам ЛО, что делает возможным вычисление ЛО практически неограниченных размеров.

Пример 5. Оценим ЛО X_4^4 из примера 4. Имеем $d_1 = d_2 =]7 \cdot 2/6[= 2, d_3 = d_4 =]7 \cdot 1/6[= 1, l_1 = l_2 = [4 \cdot 2/6] = 2, l_3 = l_4 =]4 \cdot 1/6] = 1$, и искомые оценки имеют вид:

$$x_{12}x_{22}x_{31}x_{41} \le X_4^4 \le x_{12} \vee x_{22} \vee x_{31} \vee x_{41}.$$

Сложность их совместного вычисления – в наличии шести операций, а точность зависит от численных значений x_{ij}. Например, если $x_{12} = x_{22} = 10, x_{31} = x_{41} = 11$, то имеем оценки $10 \le X_4^4 \le 11$, погрешность которых 10 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левин В.И.* Логические методы в теории надежности I, II // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2009. № 1; 2010. № 1.
2. *Левин В.И.* Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. М.: Советское радио, 1982. 176 с.

Поступила в редакцию 18 марта 2011 г.

Levin V.I. LOGICAL METHODS IN THEORY OF COMPLEX SYSTEMS RELIABILITY. I. MATHEMATICAL MEANS

The logical determinants which can serve as mathematical apparatus for modeling of reliability of complex systems are described.

Key words: logical determinants; their qualities; disclosure; problem of size; reliability.