1

1

УДК 517.988.6, 517.968.48, 517.922

ПРИЛОЖЕНИЕ УСЛОВНО НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

© **С. Е. Жуковский**

Ключевые слова: условно накрывающие отображения метрических пространств; интегральное уравнение Volterra; интегро-дифференциальное уравнение.

Доказываются утверждения о разрешимости уравнений с условно накрывающими отображениями. Полученные результаты применяются к исследованию интегральных уравнений, не разрешенных относительно неизвестной функции, и интегро-дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной.

Многие задачи анализа и теории дифференциальных уравнений сводятся к решению уравнений в метрических пространствах. Для исследования их разрешимости нередко используется классический принцип сжимающих отображений. Однако можно использовать и более общие теоремы о существовании решений абстрактных уравнений, например, основанные на понятии накрывания отображений (см., например, [1, 2, 3]). Так, теория накрывающих отображений использовалась в [4, 5] при исследовании задачи Коши и краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в [6] – для исследования локальной разрешимости управляемых систем. В этой статье приводится теорема о липшицевом возмущении накрывающих отображений, которая далее применяется к исследованию интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

1. Условно накрывающие отображения. Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – метрические пространства. Всюду далее замкнутый шар в пространстве X с центром в точке $x \in X$ и радиуса $r \geq 0$ будем обозначать через $B_X(x,r)$. Пусть заданы отображение $F : X \to Y$, число $\alpha > 0$, множество $\mathfrak{B} \subseteq X \times [0,+\infty)$, множество $W \subseteq Y$ и такое множество $U \subseteq X$, что $B_X(u,r) \subseteq U$ для всех $(u,r) \in \mathfrak{B}$.

О п р е д е л е н и е 1. *Отображение $F : X \to Y$ назовем условно α-накрывающим множество W относительно U на системе $\mathfrak{B}$, если для любых $(u,r) \in \mathfrak{B}$ имеет место включение*

$$B_Y(F(u),\alpha r) \cap W \cap F(U) \subseteq F\big(B_X(u,r)\big).$$

Отметим, что это определение является обобщением понятия условной накрываемости, введенного в [4]. Если $\mathfrak{B} = \{(x,r) : B_X(x,r) \subseteq U\}$, то условно α-накрывающее множество W относительно U на системе $\mathfrak{B}$ отображение F в [4] называется условно α-накрывающим относительно множеств U, W.

Для применения определенного здесь понятия к функциональным, интегральным и дифференциальным уравнениям необходимы условия накрываемости отображений, действующих в функциональных пространствах. В работе [7] такие условия получены для оператора суперпозиции в пространстве непрерывных функций. Приведем пример класса условно накрывающих отображений в пространстве существенно ограниченных функций.

Пусть Ω – некоторое подмножество $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^n$ – некоторый вектор. Стандартно обозначим через $L_\infty([a,b],\Omega)$ пространство измеримых существенно ограниченных функций $x:[a,b]\to\Omega$ с метрикой

$$\rho_{L_\infty}(x,u) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |x(t)-u(t)|,$$

через $AC_\infty(A,[a,b],\Omega)$ – множество абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ таких, что $x(a)=A$ и $\dot{x}\in L_\infty([a,b],\Omega)$.

Пусть задана измеримая по первому и непрерывная по второму аргументу функция $g: [a,b]\times\Omega\to\mathbb{R}^l$, такая, что для любого $x\in L_\infty([a,b],\,\Omega)$ функция $t\mapsto g(t,x(t))$ существенно ограниченна на $[a,b]$. Кроме того, даны число $R>0$ и функция $u_0\in L_\infty([a,b],\Omega)$. Для каждого $t\in[a,b]$ положим

$$U(t) = B_\Omega(u_0(t),R) = B_{\mathbb{R}^n}(u_0(t),R)\cap\Omega.$$

Далее, пусть при каждом $t\in[a,b]$ заданы множество $W(t)\subseteq\mathbb{R}^l$ и некоторая система $\mathfrak{A}(t)\subseteq U(t)\times[0,+\infty)$ такая, что $B_\Omega(v,r)\subseteq U(t)$ для любых $(v,r)\in\mathfrak{A}(t)$. Определим множества

$$U = \{\, x\in L_\infty([a,b],\,\Omega)\ :\ x(t)\in U(t),\ \dot{\forall}\ t\in[a,b]\,\},$$

$$W = \{\, y\in L_\infty([a,b],\,\mathbb{R}^l)\ :\ y(t)\in W(t),\ \dot{\forall}\ t\in[a,b]\,\},$$

$$\mathfrak{A} = \{(u,r)\ :\ u\in U,\ r\geq 0,\ (u(t),r)\in\mathfrak{A}(t),\ \dot{\forall}\ t\in[a,b]\,\}.$$

Л е м м а 1. *Пусть существует такое $\alpha>0$, что при п.в. $t\in[a,b]$ отображение $g(t,\cdot):\Omega\to\mathbb{R}^l$ является условно α-накрывающим множество $W(t)$ относительно $U(t)$ на системе $\mathfrak{A}(t)$. Тогда оператор $N_g: L_\infty([a,b],\,\Omega)\to L_\infty\big([a,b],\,\mathbb{R}^l\big)$,*

$$N_g(x)(t) = g\big(t,x(t)\big),\ \ \dot{\forall} t\in[a,b]$$

будет условно α-накрывающим множество W относительно U на системе $\mathfrak{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $u\in U$, $r>0$, такие, что $(u,r)\in\mathfrak{A}$, и положим $w=N_g(u)$. Для произвольного $y\in B_{L_\infty([a,b],\,\mathbb{R}^l)}(w,\alpha r)\cap W\cap N_g(U)$ имеем

$$y(t)\in B_{\mathbb{R}^l}(w(t),\alpha r)\cap W(t)\cap g(t,U(t))$$

при п.в. $t\in[a,b]$. Определим многозначное отображение $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ формулой

$$\Gamma(t) = B_\Omega(u(t),r) = B_{\mathbb{R}^n}(u(t),r)\cap\Omega.$$

Это отображение измеримо. Так как отображение $g(t,\cdot):\Omega\to\mathbb{R}^l$ является условно α-накрывающим множество $W(t)$ на системе $\mathfrak{A}(t)$, то при п.в $t\in[a,b]$ выполнено включение $y(t)\in g(t,\Gamma(t))$. Согласно теореме Филиппова (см. теорему 1.7.10 из [8]), существует такой измеримый селектор $x(\cdot)\in B_{L_\infty([a,b],\,\Omega)}(u,r)$ многозначного отображения $\Gamma(\cdot)$, что

$$y(t) = g(t,x(t)),\ \ \dot{\forall}\ t\in[a,b].$$

Таким образом, $y\in N_g\big(B_{L_\infty([a,b],\,\Omega)}(u,r)\big)$. Следовательно,

$$N_g\big(B_{L_\infty([a,b],\,\Omega)}(u,r)\big)\supseteq B_{L_\infty([a,b],\,\mathbb{R}^l)}(w,\alpha r)\cap W\cap N_g(U)$$

для любых $(u,r)\in\mathfrak{A}$. $\square$

Из доказанного утверждения следует лемма 2 работы [4]. Приведем еще один частный случай леммы 1. Пусть заданы $\alpha > 0$, $R > 0$, $u_0 \in L_\infty([a,b],\Omega)$. При п.в. $t \in [a,b]$ положим

$$U(t) = B_\Omega(u_0(t),R), \quad w_0(t) = g\big(t,u_0(t)\big), \quad W(t) = B_{\mathbb{R}^m}(w_0(t),\alpha R),$$
$$\mathfrak{A}(t) = \big\{(v,r) \,:\, v \in U(t),\, 0 \le r \le [0, R - |v - u_0(t)|]\big\}. \tag{1}$$

Обозначим

$$U = B_{L_\infty([a,b],\Omega)}(u_0,R), \;\; W = B_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^l)}(w_0,\alpha R),$$
$$\mathfrak{A} = \big\{(u,r) \,:\, u \in U, \; 0 \le r \le R - \rho_{L_\infty([a,b],\Omega)}(u,u_0)\big\}.$$

С л е д с т в и е. *Пусть при п.в.* $t \in [a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot)$ *является условно* α*-накрывающим множество* $W(t)$ *относительно* $U(t)$ *на системе* $\mathfrak{A}(t)$. *Тогда оператор* N_g *будет условно* α*-накрывающим множество* W *на системе* $\mathfrak{A}$.

2. Липшицевы возмущения условно накрывающих отображений. Приведем утверждение, являющееся обобщением теоремы 1 из [4] о липшицевых возмущениях накрывающих отображений.

Для заданных отображения $\Upsilon : X \times X \to Y$ и точки $y \in Y$ рассмотрим уравнение

$$\Upsilon(x,x) = y \tag{2}$$

относительно неизвестного $x \in X$.

Пусть даны точка $u_0 \in X$ и числа $\alpha > \beta \ge 0$, $R > 0$. Положим

$$w_0 = \Upsilon(u_0,u_0), \quad U = B_X(u_0,R),$$
$$\mathfrak{r}(y) = \frac{1}{\alpha-\beta}\,\rho_Y\big(y,w_0\big), \quad \mathfrak{U}(y) = B_X(u_0,\mathfrak{r}(y)).$$

Для каждого $x_2 \in U$ определим

$$W(x_2) = B_Y(\Upsilon(u_0,x_2),\alpha R), \;\; \mathfrak{B}(x_2) = \{\,(x_2,r) \;:\; 0 \le r \le R - \rho_X(x_2,u_0)\,\}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть пространство* X *полно и выполнены следующие предположения:*
a) *для любого* $x_2 \in U$ *отображение* $\Upsilon(\cdot,x_2) : X \to Y$ *является условно* α*-накрывающим множество* $W(x_2)$ *относительно* U *на системе* $\mathfrak{B}(x_2)$;
b) *для любых* $x_1, x_2 \in U$ *выполнено*

$$\rho_Y(\Upsilon(x_1,x_1),\Upsilon(x_1,x_2)) \le \beta\rho_X(x_1,x_2);$$

c) *для любой последовательности* $\{u_k\} \subset U$ *из того, что* $u_k \to u$, $\Upsilon(u_k,u) \to y$, *следует* $\Upsilon(u,u) = y$.

Тогда, если

$$\mathfrak{r}(y) \le R, \tag{3}$$
$$y \in \bigcap_{x_2 \in \mathfrak{U}(y)} \Upsilon(U,x_2), \tag{4}$$

то существует $\xi \in U$ *такое, что* $\Upsilon(\xi,\xi) = y$ *и* $\rho_X(\xi,u_0) \le \mathfrak{r}(y)$.

Доказательство этой теоремы приводить не будем, т.к. оно повторяет доказательство теоремы 1 из [4].

3. Локальная разрешимость интегральных уравнений. Пусть заданы замкнутое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, измеримая по первому аргументу, непрерывными по совокупности второго и третьего аргументов функция $f : [a,b]\times\Omega\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ и измеримая по совокупности первого и второго аргументов, непрерывная по третьему аргументу функция $\mathcal{K} : [a,b]\times[a,b]\times\Omega \to \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим уравнение

$$f\Big(t, x(t), \int_a^t \mathcal{K}(t,s,x(s))\,ds\Big) = 0, \;\; x(t)\in\Omega, \;\; t\in[a,b]. \tag{5}$$

Будем говорить, что уравнение (5) локально разрешимо, если существуют число $\gamma\in(a,b]$ и функция $x\in L_\infty([a,\gamma],\Omega)$, удовлетворяющая (5) при п.в. $t\in[a,\gamma]$.

Сформулируем утверждение о существовании и оценке локальных решений уравнения (5). Пусть заданы числа $R>0$, $d>0$, $\alpha>0$, и функция $u_0\in L_\infty([a,\infty),\Omega)$. Положим $V = B_{\mathbb{R}^m}\big(0,d\big)$. Для п.в. $t\in[a,b]$, для любых $z\in\mathbb{R}^m$ обозначим

$$U(t) = B_\Omega(u_0(t),R), \;\; W(t,z) = B_{\mathbb{R}^l}(f\big(t,u_0(t),z\big),\alpha R).$$

Т е о р е м а 2. *Пусть*

a) *существует такая суммируемая функция* $\mathcal{N} : [a,b]\to[0,+\infty)$, *что при п.в.* $t\in[a,b]$, $s\in[a,t]$ *выполнено неравенство* $|\mathcal{K}(t,s,u_0(s))|\le\mathcal{N}(s)$;

b) *существует такая суммируемая функция* $\mathcal{M} : [a,b]\to[0,+\infty)$, *что при п.в.* $t\in[a,b]$, $s\in[a,t]$, *любых* $x,\bar{x}\in U(t)$ *имеет место неравенство*

$$|\mathcal{K}(t,s,x)-\mathcal{K}(t,s,\bar{x})|\le\mathcal{M}(s)|x-\bar{x}|;$$

c) *существует такое* $\Lambda>0$, *что при п.в.* $t\in[a,b]$, *любых* $x\in U(t)$ *выполнено неравенство* $|f(t,x,0)|\le\Lambda$;

d) *существует такое неотрицательное число* P, *что при п.в.* $t\in[a,b]$, *любых* $x\in U(t)$, $z,\bar{z}\in V$ *имеет место неравенство*

$$|f(t,x,z)-f(t,x,\bar{z})|\le P|z-\bar{z}|;$$

e) *при п.в.* $t\in[a,b]$, *любых* $z\in V$ *отображение* $f\big(t,\cdot,z\big) : \Omega\to\mathbb{R}^l$ *является условно* α*-накрывающим множество* $W(t,z)$ *относительно* $U(t)$ *на системе*

$$\mathfrak{A}(t) = \big\{(v,r) : \; v\in U(t), \; r\in[0,\, R-|v-u_0(t)|\,]\big\}.$$

Тогда, если

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|f(t,u_0(t),0)|<\alpha R, \tag{6}$$

$$0\in\bigcap_{z\in V} f(t,U(t),z), \;\;\; \dot\forall\, t\in[a,b], \tag{7}$$

то уравнение (5) локально разрешимо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу суммируемости функций $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, существует число $\gamma\in(a,b]$ такое, что

$$\int_a^\gamma(\mathcal{M}(s)R+\mathcal{N}(s))ds\le d, \;\; P\int_a^\gamma\mathcal{M}(s)ds<\alpha,$$

$$P\int_a^\gamma(2R\mathcal{M}(s)+\mathcal{N}(s))ds\le\alpha R-\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|f(t,u_0(t),0)|. \tag{8}$$

Покажем, что уравнение (5) разрешимо на $[a,\gamma]$.

Обозначим $X = L_\infty([a,\gamma],\Omega)$, $Y = L_\infty([a,\gamma],\mathbb{R}^l)$, $Z = L_\infty([a,\gamma],V)$, $U = B_X(u_0,R)$. Сужение функции u_0 на $[a,\gamma]$ будем обозначать также через u_0.

Рассмотрим интегральный оператор K, определенный равенством

$$K(x)(t) = \int\limits_a^t K(t,s,x(s))ds,\ \ t\in[a,\gamma].$$

Покажем, что K действует из U в Z. Выберем произвольный $x\in U$. Функция $(t,s)\mapsto \mathcal{K}(t,s,x(s))$ измерима и, кроме того, из предположений **a)-b)** следует, что

$$|\mathcal{K}(t,s,x(s))| \leq \mathcal{M}(s)R + \mathcal{N}(s).$$

Следовательно, эта функция является суммируемой. Согласно теореме Фубини (см., например, [9], глава XII, §3), функция $K(x):\, t\mapsto \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s,x(s))ds$ также суммируема. Кроме того, при п.в. $t\in[a,\gamma]$ имеет место неравенство

$$|K(x)(t)| \leq \int\limits_a^t (\mathcal{M}(s)R + \mathcal{N}(s))ds \leq d$$

Итак, действие оператора K из U в Z доказано.

Рассмотрим оператор Немыцкого N_f, определенный равенством

$$N_f(x_1,z)(t) = f(t,x_1(t),z(t)),\quad \dot{\forall}\, t\in[a,\gamma] \tag{9}$$

для любых $x_1\in X$, $z\in Z$. Для п.в. $t\in[a,\gamma]$, проивольных $x\in U(t)$, $z\in V$ имеем

$$|f(t,x,z)| \leq |f(t,x,z)-f(t,x,0)| + |f(t,x,0)| \leq \Lambda + P|z| \leq \Lambda + d.$$

Следовательно, (см., например, [10], стр. 376) определенный равенством (9) оператор N_f действует из $U\times L_\infty([a,\gamma],V)$ в $L_\infty([a,\gamma],\mathbb{R}^l)$ и является замкнутым и ограниченным.

Отметим следующие свойства операторов K, N_f. Из предположений **a)-d)** следует, что для любых x_1, x_2, $\bar{x}_2\in U$, $z\in Z$, при п.в. $t\in[a,\gamma]$ выполнены неравенства

$$\big|K(x_2)(t) - K(\bar{x}_2)(t)\big| \leq \Big(\int\limits_a^\gamma \mathcal{M}(s)ds\Big)\rho_Z(x_2,\bar{x}_2); \tag{10}$$

$$\Big|N_f(x_1,K(x_2))(t) - N_f(x_1,K(\bar{x}_2))(t)\Big| \leq \Big(P\int\limits_a^\gamma \mathcal{M}(s)ds\Big)\rho_Z(x_2,\bar{x}_2); \tag{11}$$

$$|N_f(u_0,K(u_0))(t)| \leq P\int\limits_a^\gamma (R\mathcal{M}(s)+\mathcal{N}(s))ds + |f(t,u_0(t),0)|. \tag{12}$$

Определим теперь оператор $\Upsilon: U\times U\to Y$,

$$\Upsilon(x_1,x_2) \equiv N_f(x_1,K(x_2)).$$

В таких обозначениях уравнение (5) на отрезке $[a,\gamma]$ равносильно уравнению (2) с правой частью $y=0\in Y$. Поэтому для доказательства локальной разрешимости уравнения (5) воспользуемся теоремой 1.

Покажем, что Υ удовлетворяет предположению **a)** теоремы 1. Для каждого $x_2 \in U$ положим

$$W(x_2) = B_Y(\Upsilon(u_0, x_2), \alpha R), \ \ \mathfrak{B}(x_2) = \{\, (x_2, r) \ : \ 0 \le r \le R - \rho_X(x_2, u_0)\,\}.$$

Выберем произвольное $x_2 \in U.$ Из предположений на функцию f следует, что функция $x \mapsto f(t, x, K(x_2)(t))$ непрерывна на Ω при п.в. $t \in [a, \gamma],$ функция $t \mapsto f(t, x, K(x_2)(t))$ измерима на $[a, \gamma]$ для любого $x \in \Omega.$ Поэтому, согласно следствию из леммы 1, из условия **a)** доказываемой теоремы следует, что оператор $\Upsilon(\cdot, x_2)$ является условно α-накрывающим множество $W(x_2)$ на системе $\mathfrak{B}(x_2)$ относительно $U.$

Отметим, что из неравенства (11) следует, что оператор Υ удовлетворяет предположению **b)** теоремы 1 с константой

$$\beta = P \int\limits_a^\gamma \mathcal{M}(s) ds < \alpha.$$

Теперь проверим предположение **c)** теоремы 1. Выше было показано, что операторы $K, \ \Upsilon(x_1, \cdot)$ являются липшицевыми, а оператор N_f является замкнутым. Поэтому оператор $\Upsilon : (x_1, x_2) \mapsto N_f(x_1, K(x_2))$ является замкнутым. Следовательно, он удовлетворяет предположению **c)** теоремы 1.

Покажем далее, что неравенство (3) выполняется при $y = 0$, т.е., что

$$\mathfrak{r} := \frac{1}{\alpha - \beta} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a, \gamma]} \big| f\big(t, u_0(t), K(u_0)(t)\big)\big| \le R. \tag{13}$$

Действительно, неравенства (12), (8) дают оценку

$$|f(t, u_0(t), K(u_0)(t))| \le P \int\limits_a^\gamma (2R\mathcal{M}(s) + \mathcal{N}(s)) ds - PR \int\limits_a^\gamma \mathcal{M}(s) ds +$$

$$+ \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a, \gamma]} \big| f\big(t, u_0(t), 0\big)\big| \le (\alpha - \beta) R$$

при п.в. $t \in [a, \gamma],$ из которой следует неравенство (13).

Осталось доказать включение (4). Для этого достаточно проверить, что

$$0 \in \Upsilon(U, x_2), \ \ \forall\, x_2 \in B_X(u_0, \mathfrak{r}). \tag{14}$$

Из (7) следует, что $0 \in f(t, U(t), K(x_2)(t))$ для любого $x_2 \in U,$ при п.в. $t \in [a, \gamma].$ Многозначное отображение $U(\cdot)$ измеримо, отображение $f(t, \cdot, K(x_2)(t))$ непрерывно на Ω при п.в. $t \in [a, \gamma],$ функция $t \mapsto f(t, x, K(x_2)(t))$ измерима на $[a, b]$ для любого $x \in \Omega.$ Согласно теореме Филиппова (см. теорему 1.7.10 из [8]), существует такой измеримый селектор $u(\cdot) \in B_X(u_0, R)$ многозначного отображения $U(\cdot),$ что

$$0 = f(t, u(t), K(x_2)(t)), \quad \dot{\forall}\, t \in [a, \gamma].$$

Следовательно, для любого $x_2 \in U$ выполнено $0 \in \Upsilon(U, x_2).$ Наконец из того, что $\mathfrak{r} \le R,$ вытекает включение (14). $\square$

4. Локальная разрешимость интегро-дифференциальных уравнений. Пусть заданы замкнутое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$ вектор $A \in \mathbb{R}^n,$ измеримая по первому аргументу, непрерывная по совокупности второго, третьего и четвертого аргументов функция

$f : [a,b] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ и измеримая по совокупности первого и второго аргументов, непрерывная по третьему аргументу функция $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$. Рассмотрим уравнение

$$f\big(t, \dot{x}(t), x(t), \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s,x(s))\,ds\big) = 0, \;\; x(a) = A, \;\; \dot{x}(t) \in \Omega. \tag{15}$$

Будем говорить, что уравнение (15) локально разрешимо, если существуют число $\gamma \in (a,b]$ и функция $x \in AC_\infty(\{A\}[a,\gamma],\Omega)$, удовлетворяющая (15) при п.в. $t \in [a,\gamma]$.

Пусть заданы функция $u_0 \in AC_\infty(\{A\},[a,b],\Omega)$ и положительные числа R, d, α. Положим $V = B_{\mathbb{R}^m}\big(0,d\big)$, $\mathrm{B} = B_{\mathbb{R}^n}\big(A,d\big)$,

$$U(t) = B_\Omega(u_0(t),R), \;\; \dot\forall\, t \in [a,b].$$

Для любых $\chi \in \mathrm{B}$, $z \in V$ обозначим

$$W(t,\chi,z) = B_{\mathbb{R}^l}\big(f(t,u_0(t),\chi,z),\alpha R\big), \;\; \dot\forall\, t \in [a,b].$$

Т е о р е м а 3. *Пусть функция* $\mathcal{K}$ *удовлетворяет предположениям* **a)**, **b)** *теоремы 2, и пусть выполнены условия*
c) *существует такое* $\Lambda > 0$, *что при п.в.* $t \in [a,b]$, *любых* $y \in U(t)$, *выполнено неравенство* $|f(t,y,A,0)| \le \Lambda$;
d) *существует такое неотрицательное число* P, *что при п.в.* $t \in [a,b]$, *любых* $x \in U(t)$, $z,\bar z \in V$, $\chi,\bar\chi \in \mathrm{B}$ *имеет место неравенство*

$$|f(t,x,\chi,z) - f(t,x,\bar\chi,\bar z)| \le P\max\{|\chi-\bar\chi|,\,|z-\bar z|\};$$

e) *при п.в.* $t \in [a,b]$, *всех* $\chi \in \mathrm{B}$, $z \in V$ *отображение* $f\big(t,\cdot,\chi,z\big) : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *является условно* α*-накрывающим множество* $W(t,\chi,z)$ *относительно* $U(t)$ *на системе*

$$\mathfrak{A}(t) = \big\{(v,r) : \, v \in U(t), \; r \in [0, \, R - |v - u_0(t)|\,]\big\}.$$

Тогда, если

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |f(t,u_0(t),A,0)| < \alpha R,$$

$$0 \in \bigcap_{\chi\in\mathrm{B},\; z\in V} f(t,U(t),\chi,z), \quad \dot\forall\, t \in [a,b],$$

то уравнение (15) локально разрешимо.

Доказательство этой теоремы полностью повторяет рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1 . *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. № 1. P 105-127.

2 . *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151-155.

3 . *Арутюнов А.В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Мат. заметки. 2009. Т. 86. вып. 2. С. 163-169.

4 . *Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613-634.

5 . *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1673–1674.

6 . *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561-1570.

7 . *Жуковский С.Е.* Об одном классе операторов в пространстве непрерывных функций // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1675–1677.

8 . *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.

9 . *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

10 . *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. СМБ. М.: Наука, 1968.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00619) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (контракт № 16.740.11.0426 от 26 ноября 2010 года).

Поступила в редакцию 11 апреля 2011 г.

Zhukovskiy S.E. Application of conditionally covering mappings to the integral and integro-differential equations.The solvability conditions for equations with conditionally covering mappings are obtained. These results are applied for investigation of local solvability for integral equations unsolved for the unknown function and to integro-differential equations unsolved for the derivative of the unknown function.

Key words: conditionally covering mappings in metric spaces; integral Volterra equation; integro-differential equation.

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, ассистент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-Zhuk@yandex.ru