2. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Finite dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet. Вестник Тамбовского унив. Серия: Ест. техн. науки, 1998, том 3, вып. 1, 65–78.

V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Finite dimensional analysis on a hyperboloid of one sheet. The tensor product of two irreducible finite dimensional representations of the group $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ is realized as a representation of G on functions on the hyperboloid of one sheet in $\mathbb{R}^3$. A decomposition of this representation is given in terms of the hyperboloid.
Keywords: hyperboloid, tensor products, Poisson and Fourier transforms, Plancherel formula.

Поступила в редакцию 23 ноября 2009 г.

УДК 517.98

Инварианты аффинной группы в пространстве многочленов [1]

© В. Ф. Молчанов, Н. А. Малашонок

Ключевые слова: аффинная группа прямой, орбиты, инварианты, результант.

Дано описание инвариантов группы $x \mapsto \alpha x + \beta$, действующей сопряжениями в пространстве многочленов.

В настоящей работе мы даем описание инвариантов аффинной группы прямой, действующей сопряжениями в пространстве многочленов: мы пишем различные формулы для инвариантов этого действия в терминах коэффициентов многочлена и в терминах корней его производных. Наши результаты дают простые и прозрачные доказательства формул, полученных в [1], [2].

Пусть V_n – пространство многочленов $f(x)$ степени $\leqslant n$ над полем $\mathbb{R}$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

переменная x пробегает $\mathbb{R}$. Оно имеет размерность $n+1$. Пусть G – группа аффинных преобразований φ прямой $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \varphi(x) = \alpha x + \beta,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Она действует в пространстве V_n сопряжениями:

$$T(\varphi) f = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi.$$

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 1.1.2/1474 и Темпланом 1.5.07.

Вместо $T(\varphi)$ мы иногда будем писать $T(\alpha,\beta)$, так что

$$(T(\alpha,\beta)f)(x) = \frac{1}{\alpha}f(\alpha x+\beta) - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Мы хотим описать G-орбиты в V_n, $n \geqslant 2$. Достаточно это сделать для подмножества V_n^+, состоящего из многочленов $f(x)$ с $a_n > 0$. Всякая G-орбита двумерна [1], поэтому нам надо найти $n-1$ алгебраически независимых инвариантов.

Лемма 1 *Всякая G-орбита в V_n^+ содержит многочлен с* $a_{n-1}=0$.

Доказательство. Пусть $f \in V_n^+$. Производная $f^{(n-1)}(x)$ имеет корень

$$\xi = -\frac{a_{n-1}}{na_n}.$$

Преобразование $T(1,\xi)$ переводит $f(x)$ в многочлен

$$h(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-2}x^{n-2} + b_nx^n, \tag{1}$$

где $b_0 = f(\xi)-\xi$ и

$$b_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(\xi), \quad k=1,\ldots,n-2, \tag{2}$$

с требуемым свойством. $\square$

Коэффициенты b_k многочлена $h(x)$ выражаются через коэффициенты многочлена $f(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n, \\ b_k &= \sum_{i=0}^{n-k}\binom{k+i}{k}a_{k+i}\,\xi^i, \quad k=1,\ldots,n-2, && (3)\\ b_0 &= -\xi + \sum_{i=0}^{n} a_i\xi^i. && (4)\end{aligned}$$

В формулах (3), (4) два последних слагаемых в каждой из сумм подобны. Приводя их, получим

$$\begin{aligned} b_k &= (na_n)^{-n+k+1}\left\{\sum_{i=0}^{n-k-2}(-1)^i\binom{k+i}{k}a_{k+i}\,a_{n-1}^i\,(na_n)^{n-k-1-i}\right. \\ &+ \left.(-1)^{n-k-1}\,\frac{n-k-1}{n}\binom{n}{k}a_{n-1}^{n-k}\right\}, \quad k=1,\ldots,n-2, && (5)\\ b_0 &= \ldots + \frac{a_{n-1}}{na_n}, && (6)\end{aligned}$$

где многоточие обозначает правую часть (5) с $k=0$.

Стационарная подгруппа многочлена $h(x)$, см. (1), состоит из преобразований φ с $\beta = 0$, то есть из преобразований $x \mapsto \alpha x$. Соответствующий оператор $T(\alpha, 0)$ переводит $h(x)$ в многочлен

$$(T(\alpha,0)h)(x) = \sum \alpha^{k-1} b_k x^k.$$

Следовательно, инварианты группы G на многочлене $h(x)$ – это его коэффициенты b_k, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, деленные на степень старшего коэффициента $b_n = a_n$ с показателем $(k-1)/(n-1)$. Мы получили теорему

Теорема 2 *Представление T группы G имеет следующие алгебраически независимые инварианты Ψ_k, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, в множестве V_n^+:*

$$\begin{aligned} \Psi_k(f) &= a_n^{-(k-1)/(n-1)} \frac{1}{k!} f^{(k)}\left(-\frac{a_{n-1}}{na_n}\right), \quad k = 1, \ldots, n-2, \\ \Psi_0(f) &= a_n^{1/(n-1)} \left\{ f\left(-\frac{a_{n-1}}{na_n}\right) + \frac{a_{n-1}}{na_n} \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы получить явные выражения для Ψ_k через коэффициенты многочлена $f(x)$, надо правые части формул (5), (6) умножить на $a_n^{-(k-1)/(n-1)}$.

Вспомним понятие результанта $R(f, g)$ двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$, см. например, [3]. С точностью до множителя результант наших многочленов $f^{(n-1)}(x)$ и $f^{(k)}(x)$ есть b_k при $k = 1, \ldots, n-2$, см. (2), и есть $b_0 + \xi$ при $k = 0$. Переходя от b_k к Ψ_k, получаем теорему

Теорема 3 *Инварианты Ψ_k, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, выражаются следующим образом через результанты:*

$$\begin{aligned} \Psi_k(f) &= a_n^{-(k-1)/(n-1)} (na_n)^{-n+k} R\left(\frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}, \frac{f^{(k)}}{k!}\right), \quad k = 1, \ldots, n-2, \\ \Psi_0(f) &= a_n^{1/(n-1)} \left\{ (na_n)^{-n} R\left(\frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}, f\right) + \frac{a_{n-1}}{na_n} \right\}. \end{aligned}$$

Результант $R(f, g)$ выражается через разности корней многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Пусть $z_1, \ldots, z_{n-k}$ – корни многочлена $f^{(k)}(x)$. Их сумма равна $(n-k)\xi$.

Теорема 4 *Инварианты Ψ_k, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, выражаются следующим образом через корни многочлена $f^{(k)}(x)$:*

$$\begin{aligned} \Psi_k(f) &= a_n^{(n-k)/(n-1)} (n-k)^{-n+k} \binom{n}{k} \prod_{j=1}^{n-k} \sum_{p=1}^{n-k} (z_p - z_j), \quad k = 1, \ldots, n-2, \\ \Psi_0(f) &= a_n^{n/(n-1)} n^{-n} \prod_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} (z_p - z_j) - a_n^{1/(n-1)} n^{-1} (z_1 + \ldots + z_n). \end{aligned}$$

Наконец, выразим результанты через определители. Обозначим (определитель порядка $n-k+1$):

$$D_k = \begin{vmatrix} \binom{n}{k}a_n & \binom{n-1}{k}a_{n-1} & \binom{n-2}{k}a_{n-2} & \dots & a_k \\ na_n & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & na_n & a_{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & na_n & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Теорема 5 *Инварианты* Ψ_k, $k=0,1,\dots,n-2$, *выражаются через* D_k:

$$\begin{aligned} \Psi_k(f) &= a_n^{-(k-1)/(n-1)}(na_n)^{-n+k}D_k, \quad k=1,\dots,n-2, \\ \Psi_0(f) &= a_n^{1/(n-1)}\left\{(na_n)^{-n}D_0 + \frac{a_{n-1}}{na_n}\right\}. \end{aligned}$$

Литература

1. N. A. Malaschonok. Invariants of the real line affine group on the space of polynomials. Вестник Тамбовского унив. Серия: Ест. техн. науки, 2006, том 11, вып. 1, 53–56.

2. Н. А. Малашонок. Инварианты аффинной группы прямой в пространстве многочленов. Международная научная конференция «Гармонический анализ на однородных пространствах и квантование», 24–28 сентября, 2007, 15–18.

3. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1968.

V. F. Molchanov, N. A. Malaschonok. Invariants of the affine group on the space of polynomials. A description of invariants of the group $x \mapsto \alpha x + \beta$ acting by conjugations on the space of polynomials is given.
Keywords: the affine group of the real line, orbits, invariants, resultant.

Поступила в редакцию 23 ноября 2009 г.