

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

**БЛАГОДАРНОСТИ:** Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 08–01–00410 и Федеральной программой содружества УрО РАН с СО РАН.

Subbotina N.N., Shagalova L.G. Application of the optimal control theory to solutions of Hamilton–Jacobi equations with state constraints. Two Cauchy problems with state constraints are considered for the Hamilton–Jacobi equations arising in molecular biology and economy, accordingly. The problems have no classical solutions. The generalized solutions are introduced, that are subdifferentiable everywhere in domain. A method is suggested to construct the generalized solutions using auxiliary optimal control problems. Results and analysis of numerical experiments are exposed.

*Key words:* Hamilton–Jacobi equations; state constraints; viscosity solutions; minimax solutions; optimal control; value function; subdifferential.

Субботина Нина Николаевна, Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, заведующий сектором отдела динамических систем, e-mail: subb@uran.ru.

Шагалова Любовь Геннадьевна, Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела динамических систем, e-mail: shag@imm.uran.ru.

УДК 517.95

## **СИЛЬНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ**

© В.И. Сумин

*Ключевые слова:* распределенные задачи оптимизации; управляемые вольтерровы функциональные уравнения; поточечный принцип максимума; особые управления. Показывается, что для широкого класса распределенных оптимизационных задач характерно сильное вырождение особых управлений поточечного принципа максимума, когда вместе с принципом максимума, который можно рассматривать как необходимое условие оптимальности первого порядка при игольчатом варьировании управлений, вырождаются и все необходимые условия оптимальности особых управлений до порядка, равного размерности пространства независимых переменных. Описан способ получения содержательных необходимых условий оптимальности сильно вырожденных особых управлений.

Управления, особые в смысле *поточечного принципа максимума* (п.п.м.), на которых он вырождается, играют важную роль в теории оптимизации и ее приложениях [1–4]. Однако, для распределенных систем вопросы получения *необходимых условий оптимальности* (н.у.о.) *особых управлений* (о.у.) изучены еще относительно слабо: в основном рассматривались управляемые системы Гурса–Дарбу и близкие им [2, 5–9]. Главные усилия были

направлены на конструирование с учетом специфики таких систем формул приращения, удобных для вычисления старших вариаций функционалов. За допустимые брались обычно кусочно-непрерывные управления. Предполагалось, как правило, что каждому допустимому управлению отвечает единственное глобальное решение управляемой начально-краевой задачи. Принципиально важно изучение более широкого класса управлений — измеримых (например, [3, С. 291; 4, 10], причем без указанного ограничительного условия на разрешимость управляемой начально-краевой задачи).

Соответствующий достаточно общий способ изучения о.у. п.п.м., опирающийся на возможность представления управляемой начально-краевой задачи в форме функционального уравнения второго рода специального вида в лебеговом пространстве и использующий теорию тензорных произведений лебеговых пространств для вычисления старших вариаций функционалов, был предложен в [11] (описание указанной формы см., например, в [12, 13]; в [13] можно найти самые разнообразные примеры приводимых к этой форме начально-краевых задач для нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными). В [14–16] была представлена обобщающая способ [11] схема изучения о.у., обслуживающая широкий класс распределенных управляемых систем (приводимых к упомянутой форме) и обширный аксиоматически описанный в [14–16] класс способов варьирования, включающий большинство способов, традиционно использующихся в теории н.у.о. (классическое варьирование, игольчатое, импульсное на полосах, варьирование пакетами, сдвигом и др.).

Доклад посвящен конкретизации схемы [14–16] применительно к игольчатому варьированию [16, 17]. Показывается, что для распределенных задач оптимизации достаточно характерно сильное вырождение о.у. п.п.м., когда вместе с п.п.м. (н.у.о. 1-го порядка при игольчатом варьировании) вырождаются и все н.у.о. о.у. до порядка, равного размерности пространства независимых переменных. Это происходит, если задача «устроена не слишком сложно», как часто и бывает в приложениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.
2. *Васильев О.В.* Качественные и конструктивные методы оптимизации управляемых процессов с распределенными параметрами: автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук Л.: ЛГУ, 1984.
3. *Мордукович Б.Ш.* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.
4. *Зеликин М.И., Борисов В.Ф.* Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений. // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 90. Оптимальное управление 4. М.: ВИНТИ, 2001.
5. *Срочко В.А.* Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами // Сиб. математ. журн. 1976. Т. 17. № 5. С. 1108–1115.
6. *Ащепков Л.Т., Васильев О.В., Коваленок И.Л.* Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса–Дарбу // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 6. С. 1054–1059.
7. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимова К.Б.* Необходимые условия оптимальности второго порядка для систем с распределенными параметрами. Мн., 1982. (Препринт/АН БССР. Ин-т математики, № 31).
8. *Бурдуковский А.Н.* Условия оптимальности особых управлений в задаче Гурса–Дарбу // Управляемые системы. Новосибирск, 1986. Вып. 26. С. 16–24.
9. *Мансимова К.Б.* Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук Баку: Бакинский гос. ун-т, 1994.
10. *Силлин Д.Б.* Линейные задачи оптимального быстрогодействия с разрывными на множестве положительной меры управлениями // Матем. сб. 1986. Т. 26. № 3. С. 439–448.
11. *Сумин В.И.* Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: дис. канд. физ.-мат. наук. Горький. 1975.
12. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // ДАН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.
13. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.

14. Сумин В.И. Дифференцирование функционалов оптимального управления / "Материалы итоговой научной конф. радиофиз. ф-та ГГУ за 1982 г., Горький 1-2 февр. 1983. Ч. 2. Деп. в ВИНТИ: № 6035-83 ДЕП. С. 84–91.

15. Сумин В.И. Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // ДАН СССР. 1991. Т. 320. № 2. С. 295–299.

16. Сумин В.И. Сильное вырождение особых управлений в задачах оптимизации распределенных систем // Оптимизация. Сб. научн. тр.. Новосибирск, 1993. № 52 (69). С. 74–94.

17. Сумин В.И. Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Компьютерные науки. Ижевск, 2010. Вып. 3. С. 70–80.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

**БЛАГОДАРНОСТИ:** Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009–2013 годы) (проект НК–13П–13) и АЦВП «Развитие потенциала высшей школы (2009–2011 годы)» Минобрнауки РФ (регистрационный номер проекта 2.1.1/3927).

Sumin V.I. Strong degeneration of singular controls in the sense of the maximum principle in distributed optimization problems. It is proved that for distributed optimization problems a sufficiently typical situation is strong degeneration of the singular controls in the sense of the maximum principle, when together with the maximum principle (which is a first order necessary optimality condition in the case of spike-shaped variation) all necessary optimality conditions through order  $n$  are degenerate. A derivation of constructive necessary optimality conditions for singular controls is suggested.

*Key words:* distributed optimization problems; Volterra functional equations; pointwise maximum principle; singular controls.

Сумин Владимир Иосифович, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики, e-mail: v\_sumin@mail.ru.

УДК 519.853, 517.983

## РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА КУНА–ТАККЕРА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

© М.И. Сумин

*Ключевые слова:* выпуклое программирование; параметрическая задача; теорема Куна–Таккера в недифференциальной форме; двойственная регуляризация; оптимальное управление; некорректные задачи.

Обсуждаются т. н. регуляризованная теорема Куна–Таккера в недифференциальной форме для параметрической задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве и возможности ее приложения при решении задач оптимизации, оптимального управления и некорректных задач.