Molchanov V.F. Delta functions on spaces of polynomials. On the space $V_n \subset L^2(-1,1)$, consisting of polynomials of degree $\leqslant n$, the distribution $\delta^{(k)}(x)$ is the inner product with some polynomial. We write explicit expressions of it and its norm and find the asymptotic of the norm.

Key words: delta functions; Legendre polynomials; Christoffel–Darboux' formula.

Молчанов Владимир Федорович, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, e-mail: molchano@molchano.tstu.ru.

УДК 517.995

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© С.А. Муртазина

Ключевые слова: бифуркация; вынужденные колебания; субгармонические колебания.
Рассматривается задача о локальных бифуркациях вынужденных колебаний двупараметрических динамических систем. Предлагается теорема об устойчивости возникающих периодических решений.

Рассмотрим систему, зависящую от двумерного параметра $\mu = (\alpha, \beta)$ и T-периодической по t правой частью:

$$x' = \big(A_0 + (\alpha - \alpha_0)A_{11}(t) + (\beta - \beta_0)A_{12}(t)\big)x + a(x, t, \alpha, \beta), \ x \in R^N. \tag{1}$$

Положим, что правая часть непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x и μ; каждое начальное условие $x(t_0) = x_0$ однозначно задает решение $x(t)$ уравнения (1), определенное при всех t; $a(x,t,\mu)$ равномерно по t и μ удовлетворяет соотношению $\|a(x,t,\mu)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$.

При изменении характера устойчивости нулевого решения в системе (1) возможны различные локальные бифуркации в окрестности решения $x \equiv 0$. в частности возможно возникновение ненулевых T-периодических решений (бифуркация вынужденных колебаний), ненулевых qT-периодических решений, $q > 1$ (бифуркация субгармонических колебаний) и др. Задача о таких бифуркациях изучалась во многих работах [1–3]. В данной работе предлагается схема приближенного исследования бифуркации субгармонических колебаний и приводится теорема об устойчивости возникающих периодических решений. Ниже предполагается выполненным следующее условие:

U1) A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\dfrac{2\pi\theta i}{T}$. Здесь $\theta \in (0,1]$, θ рационально, $\theta = \dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь, и не имеет других собственных значений на мнимой оси.

Значение μ_0 параметра μ назовем точкой бифуркации субгармонических колебаний периода qT системы (1), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\mu = \mu(\varepsilon)$, при котором система (1) имеет ненулевое qT-периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, причем $\mu(\varepsilon) \to \mu_0$ и $\max\limits_t \|x(t, \varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим через $e \pm ig$ и $e^* \pm ig^*$ собственные векторы матрицы A и транспонированной к ней матрицы A^* соответственно, отвечающие собственным значениям $\pm\dfrac{2\pi\theta i}{T}$, которые можно выбрать из соотношений $(e, e^*) = (g, g^*) = 1$. $(e, g^*) = (g, e^*) = 0$.

Положим,

$$\triangle = detQ, \ Q = \det \begin{bmatrix} (\chi_1, e^*) & (\chi_2, e^*) \\ (\chi_1, g^*) & (\chi_2, g^*) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где

$$\chi_1 = \int\limits_0^{qT} [A_0 x(t) + A_{11}(t) e(t)] \, dt\,, \ \chi_2 = \int\limits_0^{qT} [A_0 y(t) + A_{12}(t) e(t)] \, dt\,;$$

$$e(t) = e^{A_0 t} e, \ \ x(t) = \int\limits_0^t e^{A_0 (t-s)} A_{11}(s) e(s) ds, \ \ y(t) = \int\limits_0^t e^{A_0 (t-s)} A_{12}(s) e(s) ds.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнено условие U1 и* $\triangle \neq 0$. *Тогда* $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ *является точкой бифуркации субгармонических колебаний периода* qT *системы* (1).

Всюду ниже будем предполагать, что нелинейность $a(x, t, \mu)$ в уравнении (1) имеет вид $a(x, t, \mu) = a_2(x, t, \mu) + a_3(x, t, \mu)$. где $a_2(x, t, \mu)$ содержит квадратичные x слагаемые, а $a_3(x, t, \mu)$ удовлетворяет соотношению $\|a_3(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^3)$ и при $\|x\| \to 0$ равномерно по t и μ.

Т е о р е м а 2. *Существующие в условиях теоремы* 1 *бифурцирующие решения* $x(t, \varepsilon)$ *системы* (1) *и соответствующие значения параметра* $\mu(\varepsilon) = (\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))$ *вычисляются по формулам:*

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon e(t) + \varepsilon^2 e_1(t) + o(\varepsilon^2), \ \ \alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + o(\varepsilon), \ \ \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + o(\varepsilon).$$

Здесь $e(t) = e^{A_0 t} e$. $e_1(t)$ – решение задачи Коши

$$\left. \begin{array}{l} x' = A_0 x + \big(\alpha_1 A_{11}(t) + \beta_1 A_{12}(t)\big) e(t) + a_2\big(e(t), t, \mu_0\big) \\ x(0) = e_1 \end{array} \right\},$$

где

$$e_1 = \Gamma_0 v_2\,, \ \ \alpha_1 = J_\alpha(v_2), \ \ \beta_1 = J_\beta(v_2), \ \ v_2 = e^{A_0 qT} \int_0^{qT} e^{-A_0 t} a_2(e(t), t, \mu_0) \, dt;$$

Γ_0 — действующий в R^N оператор:

$$\Gamma_0 v_2 = J_\alpha(v_2) e + J_\beta(v_2) g + (I - e^{A_0 qT})^{-1} \big(v_2 + J_\alpha(v_2) x(t) + J_\beta(v_2) y(t)\big),$$

где $J_\alpha(v_2)$ и $J_\beta(v_2)$ определяются из равенства $\big(J_\alpha(v_2), J_\beta(v_2)\big)^T = -Q^{-1}\big((v_2, e^*), (v_2, g^*)\big)^T$; здесь Q — матрица из формулы (2).

Рассмотрим вопрос об устойчивости бифурцирующих решений $x(t, \varepsilon)$ системы (1) при $\mu = \mu(\varepsilon)$. Известно, что если хотя бы одно собственное значение A_0 имеет положительную вещественную часть, то бифурцирующие решения системы (1) неустойчивы при всех малых $\varepsilon > 0$. Пусть выполнено U1. Предположим, что все остальные собственные значения A_0 имеют отрицательные вещественные части. Обозначим: $D_0 = P_0 A_0 P_0$. где P_0 — оператор проектирования в собственное подпространство E_0, отвечающее собственным значениям

$\pm\frac{2\pi\theta i}{T}$; $B_0 = A_0 - D_0$; $Q(t) = e^{-D_0 t}\big(\alpha_1 A_{11}(t)+\beta_1 A_{12}(t)\big)+a'_{2x}\big(e(t),t,\mu_0)\big)e^{D_0 t}$ — ограниченная и qT-периодическая по t матрица, где $a'_{2x}(x,t,\mu)$ — матрица Якоби вектор-функции $a_2(x,t,\mu)$.

Пусть S — постоянная матрица, удовлетворяющая равенству

$$\int_0^{qT} e^{-B_0\tau}Se^{B_0\tau}d\tau = \int_0^{qT} e^{-B_0\tau}Q(\tau)e^{B_0\tau}d\tau.$$

Обозначим через $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_2^{(1)}$ собственные значения матрицы P_0SP_0.

Теорема 3. *Пусть $\lambda_1^{(1)}<0$ и $\lambda_2^{(1)}<0$. Тогда при всех малых $\varepsilon>0$ бифурцирующие решения $x(t,\varepsilon)$, возникающие при условиях теоремы 1, устойчивы. Если же хотя бы одно из чисел $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$ является положительным, то эти решения при всех малых $\varepsilon>0$ неустойчивы.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
3. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971. 288 с.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

Murtazina S.A. Study of the stability of many-parametric dynamic systems forced oscillations. The local bifurcation problem for forced oscillations of two-parameter dynamic system is considered. The theorem on stability of periodic solutions is proposed.

Key words: bifurcation; forced oscillations; subharmonic oscillations.

Муртазина Сария Аширафовна, Сибайский институт (филиал) БашГУ, г. Сибай, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информационных технологий, e-mail: sariamurtaz@mail.ru.

УДК 517.911.5

ТЕОРЕМЫ ОБ АППРОКСИМАЦИИ И РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© В.И. Новицкий

Ключевые слова: дифференциальное включение; аппроксимация Иосиды; односторонние условия Липшица; релаксация.

В работе получена оценка для множеств решений дифференциального включения с помощью аппроксимаций Иосиды. Рассматриваются вопросы существования решения для дифференциальных включений с невыпуклой правой частью. Приводится теорема о плотности множества решений, а также устанавливается связь между множествами решений исходного и аппроксимирующего включения.