Высшей Школы"(РНП № 2.1.1/1131), и включена в Темплан № 1.6.07.

Поступила в редакцию 12 ноября 2009 г.

Burlakov E.O., Zhukovskiy E.S, Hodaev A.P. On a correctness of an abstract boundary value problem. Conditions for correct solvability of a boundary value problems for nonlinear functional-differential equations.

Key words: functional-differential equations; boundary value problem; continuous dependence of solutions on equation's parameters.

УДК 517.965, 517.911

ВЕРХНЕЕ И НИЖНЕЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

© Т. В. Жуковская

Ключевые слова: монотонный оператор; конус в банаховом пространстве; нижнее и верхнее решения; оценки решений; операторные неравенства; уравнение с авторегулируемым запаздыванием.

Рассмотрены утверждения об операторных неравенствах, найдены условия существования верхнего и нижнего решений уравнений с монотонными операторами. Полученные результаты применяются для исследования уравнения с авторегулируемым запаздыванием.

Одной из основных задач исследования уравнений является описание свойства множеств решений. Для решения этой проблемы бывают чрезвычайно полезными утверждения о неравенствах, позволяющие построить оценки решений, доказать существование верхнего и нижнего решения. Здесь рассматриваются подобные утверждения для уравнений с монотонными операторами, действующими в полуупорядоченных банаховых пространствах.

Обозначим $L([a,b],R)$ – пространство измеримых суммируемых функций $y:[a,b]\to R$ с нормой $\|y\|_L = \int\limits_a^b |y(s)|\,ds$; $AC([a,b],R)$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to R$, производная которых $\dot{x}\in L([a,b],R)$, с нормой $\|x\|_{AC} = |x(a)| + \|\dot{x}\|_L$.

Приведем некоторые понятия теории конусов в банаховых пространствах [1], играющие важную роль в нашем исследовании.

Пусть B – банахово пространство. Замкнутое выпуклое множество $B_+\subset B$ называют *конусом*, если из $x\in B_+$, $x\neq 0$ вытекает, что $\lambda x\in B_+$ при $\lambda>0$ и $\lambda x\notin B_+$ при $\lambda<0$. Для $x,\ y\in B$ будем писать $x\rhd y$ или $y\lhd x$, если $x-y\in B_+$.

Элемент $\overline{z}\in B$ называют точной верхней границей множества $U\subset B$ и пишут $\overline{z}=\sup U$, если для всех $u\in U$ выполнено $\overline{z}\rhd u$ и для любого $y\in B$ из $y\rhd u$, $\forall u\in U$ следует $y\rhd\overline{z}$. Аналогично определяется точная нижняя граница. Если у множества из двух элементов есть точная верхняя (нижняя) граница, то существует и нижняя (верхняя), причем выполнено равенство $\sup\{x, y\} + \inf\{x, y\} = x + y$. Конус $B_+ \subset B$ называют *миниэдральным*, если у каждого множества из двух элементов есть точная нижняя (и, следовательно, верхняя) граница. Каждый элемент $x \in B$ в случае миниэдральности конуса B_+ допускает представление $x = x_+ + x_-$, где $x_+ = \sup\{x, 0\} \in B_+$, $x_- = \sup\{-x, 0\} \in B_+$. Если существует такое число M, что для всякого $x \in B$ выполнены неравенства

$$\| x_+ \| \leqslant M \| x \|, \qquad \| x_- \| \leqslant M \| x \|, \tag{1}$$

то говорят, что конус обладает свойством *несплющенности*. Конус называют *сильно миниэдральным*, если нижняя (верхняя) граница есть у каждого ограниченного по конусу множества.

Конус B_+ называется *вполне правильным*, если сходится каждая ограниченная по норме, невозрастающая (неубывающая) последовательность $x_1 \rhd x_2 \rhd \cdots \rhd x_n \cdots$. Если из $0 \lhd x \lhd y$ следует $\| x \| \leqslant m \| y \|$, где m не зависит от x и y, то конус B_+ называют *нормальным*. В этом случае, если $x \lhd y \lhd z$, то $\| y \| \leqslant (m+1)(\| x \| + \| z \|)$, т. е. из ограниченности по конусу следует ограниченность по норме.

Оператор $K : B \to B$ называют *монотонным*, если из $x \rhd y$ следует $Kx \rhd Ky$. Оператор $K : B \to B$ называется *предельно монотонно компактным на ограниченном множестве* $U \subset B$ [1, с.307], если сходится каждая последовательность

$$x_0 \rhd Kx_1 \rhd K^2 x_2 \rhd \cdots \rhd K^n x_n \cdots, \tag{2}$$

где x_n, $K^n x_n \in U$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Назовем оператор *предельно монотонно компактным,* если он обладает таким свойством на каждом ограниченном множестве из B.

Мы будем использовать следующие утверждения о неподвижных точках монотонных операторов.

Т е о р е м а 1 [1, с.308]. *Пусть монотонный оператор $K : B \to B$ преобразует в себя ограниченное замкнутое множество $U \subset B$, на котором он является предельно монотонно компактным. Пусть, далее, $u \rhd Ku$ для некоторого $u \in U$. Тогда оператор K имеет на U по крайней мере одну неподвижную точку x, удовлетворяющую условию $x \lhd u$.*

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть, кроме того, конус $B_+ \subset B$ является миниэдральным, и $\inf\{w, \vartheta\} \in U$ для любых двух неподвижных точек $w, \vartheta \in U$ оператора K. Тогда в множестве неподвижных точек оператора K, принадлежащих множеству U, существует наименьший элемент.*

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть, далее, конус $B_+ \subset B$ является миниэдральным, и для любых двух элементов x, $y \in U$ существуют такие натуральные числа n, j, что $\inf\{K^n x, K^j y\} \in U$. Тогда в множестве неподвижных точек оператора K, принадлежащих множеству U, существует наименьший элемент.*

С л е д с т в и е 2. *В условиях теоремы 2 в множестве неподвижных точек оператора K, принадлежащих множеству U, существует наибольший элемент.*

Отметим, что во всех приведенных утверждениях не требуется непрерывность отображения $K : B \to B$. Этот факт позволяет применить данные результаты к исследованию уравнения вида

$$\begin{gathered} x'(t) = f(t, x(h(t, x(t)))), \quad t \in [a, b], \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \text{если} \quad \xi \notin [a, b]. \end{gathered} \tag{3}$$

Уравнение (3) называют уравнением с авторегулируемым запаздыванием. К такому уравнению приводит, например, математическое описание взаимодействия быстро движущихся материальных точек или зарядов [2, 3]. Здесь $x(t)$ – состояние исследуемого объекта в момент времени t. Модель (3) учитывает запаздывание реакций объектов на внешние воздействия и внутреннее состояние. Поэтому функция h при всех $t \in [a, b]$, $x \in R$ удовлетворяет неравенству $h(t, x) \leqslant t$, что позволяет применять к таким уравнениям теорию вольтерровых операторов. Однако разрывность оператора $F : AC([a,\, b], R) \to L([a,\, b], R)$, порождаемого правой частью уравнения (3), становится преградой в использовании методов функционального анализа. Этой же причиной можно объяснить ряд необычных свойств уравнения (3): задача Коши может не иметь локальных решений, или иметь непродолжаемые решения, в ряде случаев, задача Коши оказывается некорректной относительно импульсных воздействий и т. д. (соответствующие примеры можно найти в [4, с. 278], [5, с.7-8]). Но, как показано ниже, в случае монотонности оператора F, задача Коши обладает классическими традиционными свойствами.

Обозначим

$$(Hx)(t) = \begin{cases} x(h(t,\, x(t))), & \text{если} \quad h(t,\, x(t)) \in [a,\, b], \\ \varphi(h(t,\, x(t))), & \text{если} \quad h(t,\, x(t)) \notin [a,\, b], \end{cases} \qquad (N_f\, y)(t) = f(t,\, y(t)).$$

Представим уравнение (3) в виде

$$x'(t) = (N_f\, H\, x)(t), \quad t \in [a,\, b]. \tag{4}$$

Для этого уравнения рассмотрим задачу Коши с условием

$$x(a) = \alpha. \tag{5}$$

Решением называем абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую уравнению (4) при почти всех $t \in [a,\, b]$ и начальному условию (5). Вольтерровость оператора $F = N_f H$ позволяет говорить о локальном определенном на $[a,\, a+\gamma]$, глобальном, предельно продолженном решениях. Упорядочив пространство суммируемых функций конусом неотрицательных функций, сможем определить понятия нижнего и верхнего решений.

Т е о р е м а 3. *Будем предполагать, что* $\alpha \geqslant \varphi(a)$, *функция* $\varphi : (-\infty, a] \to R$ *непрерывная и неубывающая, функции* $f, h : [a,\, b] \times R \to R$ *измеримы по первому аргументу, не убывают и непрерывны справа по второму аргументу, при каждом* $x \in R$ *выполнено включение* $f(\cdot, x) \in L([a,\, b], R)$, $1 \leqslant p < \infty$, *при любом* $x \in R$ *и почти всех* $t \in [a,\, b]$ *имеют место неравенства* $h(t,\, x) \leqslant t$, $f(t,\, x) \geqslant 0$. *Пусть некоторая функция* $u \in AC([a,\, b], R)$ *удовлетворяет условиям* $u'(t) \geqslant (N_f H u)(t)$, $t \in [a,\, b]$, $u(a) \geqslant \alpha$. *Тогда*

- *существует такое* $\tau > 0$ *и существует определенное на* $[a,\, a+\tau]$ *локальное решение* $x_\tau \in AC([a,\, a+\tau], R)$ *задачи* (4), (5), *для которого имеет место оценка* $x'_\tau(t) \leqslant u'(t)$, $t \in [a,\, a+\tau]$;

- *любое локальное решение* x_γ *задачи* (4), (5), *для которого имеет место оценка* $x'_\gamma(t) \leqslant u'(t)$, $t \in [a,\, a+\gamma]$, *продолжаемо либо до глобального* x_{b-a}, *удовлетворяющего неравенству* $x'_{b-a}(t) \leqslant u'(t)$, $t \in [a,\, b]$, *либо до предельно продолженного решения* x_ξ, *определенного на* $[a,\, a+\xi)$ *и удовлетворяющего на этом интервале неравенству* $x'_\xi(t) \leqslant u'(t)$;

- *существует нижнее глобальное или предельно продолженное решение* $\underline{x}_{\,\xi}$ *задачи* (4), (5), *удовлетворяющее на своей области определения неравенству* $x'_\xi(t) \leqslant u'(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.

2. *Писаренко В.Г.* Уравнения с отклоняющимся аргументом, возникающие в проблеме многих тяготеющих электрически заряженных тел при учете запаздывания сил взаимодействия // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев: Наукова думка, 1977. С. 255-269.

3. *Driver R.D.* A functional-differential system of neutral type arising in a two body-problem of classical electrodynamics // Internat. Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics. 1961. New York: Acad. Press, 1963. P. 474-484.

4. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
5. *Жуковский Е.С.* Операторные неравенства и функционально-дифференциальные уравнения: дис. канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1983. 133 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований (№ 07-01-00305, 09-01-97503), Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы"(РНП № 2.1.1/1131), и включена в Темплан № 1.6.07.

Поступила в редакцию 12 ноября 2009 г.

Zhukovskaya T.V. Upper and lower solutions of equations with monotonous operators. Statements on operator inequalities are under discussion. Conditions for existence of upper and lower solutions with operators are established. Obtained results are applied to investigation of equation with autoadjustable delay.

Key words: monotone operator; Banach space cone; upper and lower solutions; solutions estimations; operator inequalities; equation with autoadjustable delay.

УДК 517.958

О РАЗЛОЖЕНИИ В РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

© **А. Ю. Сазонов, Ю. Г. Фомичева**

Ключевые слова: весовые функциональные пространства; разложение функции в ряд.

В данной работе получены условия, обеспечивающие сходимость числовых рядов, составленных из коэффициентов Фурье разложения функции $\varphi \in H^{s+1}_{k,+}(\Omega^+)$ в ряд Фурье по системе собственных функций, а также найдено условие сходимости функционального ряда $\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p v_p$ в весовом функциональном пространстве $H^{s+1}_{k,+}(\Omega^+)$.

Пусть $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \left\{x \in R^{n+1} : x = (x_1, ..., x_n, y) = (x', y),\ x' \in \mathbb{R}^n, y > 0, y \in \mathbb{R}\right\}$, Ω^+ – произвольная область пространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$, ограниченная гиперплоскостью $\Gamma^0 : y = 0$ и произвольной поверхностью Γ^+ типа Ляпунова. В области Ω^+ рассматривается оператор

$$\begin{gathered} P(D_{x'}, B_y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + bB_y + c, \\ B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}, \mathrm{k}>0, \mathrm{c} \leqslant 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $P(D_{x'}, B_y)$ – оператор B-эллиптического типа ([1]):
существует $\delta > 0$, такое, что для любого $q = (q_1, ..., q_{n+1})$, $|q| \neq 0$, имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q_i q_j + b q_{n+1}^2 \geqslant \delta \left|q\right|^2, a_{ij} = a_{ji}. \tag{2}$$