УДК 517.911.5

О ПРЕДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ И ПРИТЯЖЕНИИ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© **И. А. Финогенко, Н. А. Чумакова**

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; предельное уравнение; функционал Ляпунова–Красовского; квазиинвариантное множество; принцип инвариантности; притяжение; асимптотическая устойчивость.

Для неавтономных функционально-дифференциальных уравнений устанавливается свойство квазиинвариантности ω-предельных множеств и аналог принципа инвариантности Ла-Салля с использованием функционалов Ляпунова–Красовского со знакопостоянной производной. На этой основе рассматриваются вопросы притяжения и асимптотической устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

В известных теоремах Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского (см. [1]) об асимптотической устойчивости автономных систем дифференциальных уравнений были использованы знакоопределенные функции Ляпунова со знакопостоянной производной в силу системы. При этом требовался дополнительный анализ множества нулей производной функции Ляпунова на наличие в нем целых траекторий системы. Позднее были установлены различные модификации теорем Барбашина и Красовского, основанные на некоторых свойствах инвариантности ω-предельных множеств. На этом свойстве основывается теорема Ла-Салля, известная, как принцип инвариантности (см. [2]), который утверждает, что ω-предельное множество системы принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству из множества нулей знакопостоянной производной функции Ляпунова в силу рассматриваемого уравнения. Принцип инвариантности позволяет эффективно решать многие прикладные задачи о притяжении и асимптотической устойчивости. Это же относится и к автономным системам с последействием. Для неавтономных уравнений ω-предельные множества не обладают свойством полуинвариантности, а множество нулей произдной функции Ляпунова зависит не только от фазовой переменной. Но оказалось, что ω-предельные множества решений обладают свойствами типа инвариантности относительно некоторых уравнений, порождаемых „сдвигами“ исходных уравнений. Это дало возможность получать аналоги принципа инвариантности для неавтономных систем и на этой основе исследовать свойства притяжения и устойчивости. Подобные результаты для асимптотически автономных и близких к ним систем дифференциальных уравнений имеются в [2]. В статье [3] приводятся результаты и обзор работ по устойчивости для неавтономных функционально-дифференциальных уравнений с использованием функционалов Ляпунова–Красовского, имеющих знакопостоянную производную, в том числе — определен анавлог принципа инвариантности. Эти исследования основаны на топологической динамике функционально-дифференциальных уравнений, которая обеспечивает существование так называемых предельных уравнений и свойство квазинвариантности ω-предельных множеств.

В данной работе исследования основаны на предельных (в общей ситуации многозначных) отображениях, которые строятся в явном виде на основе теоретико множественных операций.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть R^n — n-мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\tau \geqslant 0$ — произвольное вещественное число, C_τ — пространство всех непрерывных функций $\phi(\cdot)$, определенных на отрезке $[-\tau, 0]$ со значениями в R^n с обычной sup-нормой $\|\phi(\cdot)\|_C = \sup_{-\tau \leqslant \theta \leqslant 0} \|\phi(\theta)\|$. Для любых чисел $\alpha, \beta > 0$, $t \in [\alpha, \beta)$ и непрерывной функции $x : [\alpha - \tau, \beta) \to R^n$ определим функцию $x_t(\cdot) \in C_\tau$ равенством $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-\tau \leqslant \theta \leqslant 0$. Будем рассматривать функционально-дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot)), \quad x_\alpha(\cdot) = \varphi(\cdot), \tag{1}$$

где $\varphi(\cdot) \in C_\tau$ — начальная функция заданная в момент времени $t = \alpha$.

Сделаем следующие предположения:

A1. Отображение $f(t, \phi(\cdot))$ непрерывно по переменной $\phi(\cdot)$ равномерно относительно t. Это означает, что для любой функции $\phi(\cdot)$ и для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $\|f(t, \psi(\cdot)) - f(t, \phi(\cdot))\| < \epsilon$ для всех $t \in R^1$ при условии $\|\psi(\cdot) - \phi(\cdot)\|_C < \delta$;

A2. Для любой функции $\phi(\cdot)$ отображение $t \to f(t, \phi(\cdot))$ измеримо;

A3. Для любого ограниченного множества $D \subset C_\tau$ отображение $f(t, \phi(\cdot))$ ограничено на множестве $R^1 \times D$.

Под решением задачи (1), определенном на промежутке $[\alpha - \tau, \beta)$, понимается непрерывная функция $x(t)$, абсолютно непрерывная на каждом отрезке $[\alpha, t_1]$, $t_1 < \beta$, такая, что ее производная $\dot{x}(t)$ на этом отрезке почти всюду удовлетворяет уравнению $\dot{x}(t) = f(t, x_t(\cdot))$ и выполняется начальное условие $x_\alpha(\cdot) = \varphi(\cdot)$.

При сделанных предположениях уравнение (1) для любой начальной функции имеет локальное решение и любое ограниченное непродолжимое решение определено на максимальном промежутке $[\alpha - \tau, +\infty)$.

Через $f^a(t, \phi(\cdot))$ обозначается сдвиг отображения $f(t, \phi(\cdot))$ на величину $a > 0$, определенный равенством

$$f^a(t, \phi(\cdot)) = f(t + a, \phi(\cdot)).$$

Введем в рассмотрение два вида, вообще говоря, многозначных отображений, порождаемых сдвигами, которые будем называть предельными для отображения f.

Наибольшее предельное отображение определяется равенством

$$f^*(t, \phi(\cdot)) = \cap_{b>0} \overline{co} \cup_{a>b} f^a(t, \phi(\cdot)). \tag{2}$$

Предельное многозначное отображение относительно последовательности $t_n \to +\infty$ определяется равенством

$$f'(t, \phi(\cdot)) = \cap_{n>1} \overline{co} \cup_{k>n} f^{t_k}(t, \phi(\cdot)). \tag{3}$$

(Здесь $\overline{co}$ — знак выпуклой замкнутой оболочки множества.) Имея в виду, что f^* и f' могут быть многозначными отображениями, в дальнейшем будем рассматривать функционально-дифференциальные включения

$$\dot{x} \in f^*(t, \phi(\cdot)) \tag{4}$$

и

$$\dot{x} \in f'(t, \phi(\cdot)). \tag{5}$$

Л е м м а 1. *При выполнении условий А1, А3 справедливы следующие утверждения:*

1) *Для любых фиксированных* $(t, \phi(\cdot))$ *множества* $f^*(t, \phi(\cdot))$ *и* $f'(t, \phi(\cdot))$ *непусты, компактны, выпуклы и справедливы равенства*

$$Lim_{b \to +\infty} \overline{co} \cup_{a>b} f(t + a, \phi(\cdot)) = f^*(t, \phi(\cdot)), \tag{6}$$

$$Lim_{n\to+\infty}\overline{co}\cup_{k>n} f(t+t_k,\phi(\cdot)) = f'(t,\phi(\cdot)), \tag{7}$$

где предел понимается в метрике Хаусдорфа, определенной на всех непустых, компактных подмножествах из R^n *(см [4, стр. 347]).*

2) *Множество* $f^*(t,\phi(\cdot))$ *не зависит от* t *для любой функции* $\phi(\cdot)$.

3) *Множество* $f^*(\phi(\cdot))$ ($f'(t,\phi(\cdot))$) *представляет собой выпуклую замкнутую оболочку пределов всех сходящихся последовательностей* $\{f(t_n,\phi(\cdot)\}$ *при* $t_n\to+\infty$ *(всех сходящихся подпоследовательностей* $\{f(t+t_{n_k},\phi(\cdot))\}$ *последовательности* $\{f(t+t_n,\phi(\cdot))\}$ *при* $t_{n_k}\to+\infty$).

4) *Для каждой фиксированной функции* $\phi(\cdot)$ *множество* f^* *состоит из одно точки тогда и только тогда, когда существует предел* $\lim_{t\to+\infty} f(t,\phi(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1 следует непосредственно из теоремы [4, стр. 422].

Докажем утверждение 2. Для фиксированных $b>0$ и $(t,\phi(\cdot))$ обозначим

$$F(t,\phi(\cdot);b) = \overline{co}\cup_{a>b} f^a(t,\phi(\cdot)).$$

В силу равенства (6) для любого $b'>0$ выполняется

$$Lim_{b\to+\infty}F(t,\phi(\cdot);b+b') = f^*(t,\phi(\cdot)).$$

С другой стороны, $F(t,\phi(\cdot);b+b') = F(t+b',\phi(\cdot);b)$ и поэтому

$$Lim_{b\to+\infty}F(t,\phi(\cdot);b+b') = f^*(t+b',\phi(\cdot)),$$

откуда легко вытекает, что $f^*(t,\phi(\cdot)) = f^*(t',\phi(\cdot))$ для любых $t,t'\in R^1$.

Утверждение 3, используя равенство (6), докажем для отображения $f^*(\phi(\cdot))$. Для отображения $f\prime(t,\phi(\cdot))$ доказательство аналогично с использованием равенства (7). Учитывая установленное выше утвеждение 2, всюду в дальнейшем зависимость f^* от переменной t не указываем.

Для любого $\epsilon>0$ и множества $A\subset R^n$ через A^ϵ обозначается ϵ-окрестность множества A.

Возьмем произвольную последовательность $\epsilon_k\to+0$. Из (6) вытекает, что существует последовательность $b_k\to+\infty$ такая, что

$$f^*(\phi(\cdot)) \subset (F(t,\phi(\cdot);b_k))^{\epsilon_k} \tag{8}$$

Пусть $z\in f^*(\phi(\cdot))$ произвольно. Тогда из (8) вытекает, что существует последовательность $z_k\in F(t,\phi(\cdot);b_k)$, сходящаяся к z, каждый элемент которой представляет собой выпуклую комбинацию точек множества $\cup_{a>b_k} f(t+a,\phi(\cdot))$. В силу теоремы Каратеодори (см. [5, стр. 50]) число таких точек не превышает $n+1$, где n — размерность пространства R^n. Поэтому для каждого $k=1,2,\ldots$ существуют числа $a_k^i>b_k$, $\alpha_k^i\geqslant 0$, $i=0,\ldots,n$, $\alpha_k^0+\cdots+\alpha_k^n=1$, такие, что $z_k=\alpha_k^0 f(t+a_k^0,\phi(\cdot))+\cdots+\alpha_k^n f(t+a_k^n,\phi(\cdot))$. Последовательно выберая для каждого фиксированного $i=0,\ldots,n$ из последовательностей $\{\alpha_k^i\}_{k\geqslant1}$, $\{f(t+a_k^i,\phi(\cdot))\}_{k\geqslant1}$ сходящиеся подпоследовательности, заключаем, что вектор z представим как выпуклая комбинация предельныхв значений фнкции $f(t,\phi(\cdot))$ при $t\to+\infty$.

Пусть теперь $z=\alpha^0 f_0+\cdots+\alpha^n f_n$ — выпуклая комбинация предельных значений функции $f(t,\phi(\cdot))$, которые запишем в виде $f_i=\lim_{a_k^i\to+\infty} f(t+a_k^i,\phi(\cdot))$, $i=0,\ldots,n$. Из (6) вытекает, что для любого $\epsilon>0$ существует $B>0$ такое, что

$$F(t,\phi(\cdot);b) \subset (f^*\phi(\cdot))^\epsilon \tag{9}$$

для всех $b>B$. Тогда существует номер N такой, что для всех $k>N$ выполняется $z\in(f^*\phi(\cdot)))^{2\epsilon}$. В силу произвольности $\epsilon>0$ заключаем, что $z\in f^*(\phi(\cdot))$. Тем самым утверждение 3 доказано.

Утверждение 4 является достаточно очевидным следствием утверждения 3.

Лемма доказана.

ПОЛУИНВАРИАНТНОСТЬ ω-ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Будем говорить, что множество $H \subset C_\tau$ полуинвариантно относительно уравнения (1), если для любой функции $\psi(\cdot) \in H$ существует решение $y(t)$ включения (4), такое, что $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot) \in H$ для всех $t \geqslant 0$.

Множество $H \subset C_\tau$ квазиинвариантно относительно уравнения (1), если для любой функции $\psi(\cdot) \in H$ и любого $T > 0$ существуют предельное отображение f' и решение $y(t)$ включения (5) (с предельным отображением f' в правой части), такое, что $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot) \in H$ для всех $t \in [0, T]$.

З а м е ч а н и е 1. Легко заметить, что для любого предельного отображения f' выполняется условие

$$f'(t, \phi(\cdot)) \subset f^*(\phi(\cdot))$$

для любых $\phi(\cdot) \in C_\tau$ и $t \in R^1$. Отсюда вытекает, что свойство квазиинвариантности влечет свойство полуинвариантности.

Функцию $\psi(\cdot)$ назовем ω-предельной для решения $x(t)$ уравнения (1), определенного промежутке $[\alpha - \tau, +\infty)$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $x_{t_n}(\cdot) \to \psi(\cdot)$. Множество всех ω-предельных функций обозначим $\Lambda^+(x)$.

Л е м м а 2. *Пусть выполняются условия A1–A3, $x(t)$ — ограниченное решение уравнения (1), определенное на промежутке $[\alpha - \tau, +\infty)$. Тогда множество $\Lambda^+(x)$ непусто, компактно, связно, квазиинвариантно и $d(x_t(\cdot), \Lambda^+(x)) \to 0$ при $t \to +\infty$, где d обозначает расстояние от точки до множества в пространстве C_τ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойства непустоты, компактности, связности ω-предельного множества и $d(x_t(\cdot), \Lambda^+(x)) \to 0$ при $t \to +\infty$ для решения $x(t)$ с предкомпактной траекторией $\{\cup x_t(\cdot) : t \geq \alpha\}$ известны (см. [6]). В свою очередь предкомпактность траектории для любого ограниченного решения вытекает из условия A3 и теоремы Арцела.

Докажем квазиинвариантность множества $\Lambda^+(x)$. Пусть $\psi(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ и $T > 0$ произвольны. Тогда существует последовательность $x_{t_k}(\cdot) \to \psi(\cdot)$ при $t_k \to +\infty$. Определим последовательность функций $y^k(t) = x(t+t_k)$, $t \in [-\tau, T]$. Тогда $y^k_t(\cdot) = x_{t+t_k}(\cdot)$, $t \in [0, T]$, и функции $y^k(t)$ являются решениями уравнений

$$\dot{y}^k(t) = f(t + t_k, y^k_t(\cdot)),\, y^k_0(\cdot) = \psi_k(\cdot),\, k = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Из условия A3 вытекает, что последовательность $\{y^k(\cdot)\}$ равностепенно непрерывна, а равномерная ограниченность этой последовательности следует из ограниченности решения $x(t)$. Тогда в соответствии с теоремой Арцела у последовательности $\{y^k(\cdot)\}$ существует подпоследовательность, равномерно на отрезке $[-\tau, T]$ сходящаяся к некоторой функции $y(t)$. Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что к $y(t)$ сходится последовательность функций $y^k(t)$. Тогда $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ и в силу теоремы 1.3 из [7, стр. 16] для почти всех $t \in [0, T]$ выполняется

$$\dot{y}(t) \in \cap_{n \geqslant 1} \overline{co} \cup_{k \geqslant n} \dot{y}^k(t). \tag{11}$$

Из (10), (11) и условия A1 получаем, что для любого $\epsilon > 0$ выполняется

$$\dot{y}(t) \in (\cap_{n \geq 1} \overline{co} \cup_{k \geq n} f(t + t_k, y_t(\cdot)))^\epsilon$$

для почти всех $t \in [0, T]$, откуда, в силу произвольности $\epsilon > 0$, вытекает, что функция $y(t)$, определенная на отрезке $[-\tau, T]$, является решением включения (5) с начальной функцией $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ для предельного относительно последовательности $t_n \to +\infty$ отображения f'. Тем самым установлена квазинвариантность множества $\Lambda^+(x)$. Из него, с учетом замечания 1, вытекает его полуивариантость.

Лемма доказана.

ОБОБЩЕНИЕ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ И ПРИТЯЖЕНИЕ

Следуя [8], введем следующие определения.

Для произвольной функции $\psi(\cdot) \in C_\tau$ и числа $\Delta > 0$ через $E_\Delta(\psi(\cdot))$ обозначим множество всех непрерывных продолжений $\Psi(\cdot)$ функции $\psi(\cdot)$ на отрезок $[-\tau, \Delta]$.

Будем говорить, что функционал $W : C_\tau \to R$ имеет инвариантную производную $\partial_\psi W$ в точке $\psi(\cdot) \in C_\tau$, если для любой $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ функция $Y_\Psi(\xi) = W(\Psi_\xi(\cdot))$, где $\xi \in [0, \Delta)$, имеет в нуле конечную правую производную инвариантную относительно функций $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ (то есть значение правой производной в нуле одно и то же для всех $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$).

Функционал $V : R^1 \times R^n \times C_\tau \to R$ инвариантно дифференцируем в точке $p = (t, x, \psi(\cdot)) \in R^1 \times R^n \times C_\tau$, если в этой точке существуют конечные $\nabla_x V$, $\partial_\psi V$, $\partial_t V$ и для любой $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ выполняется равенство

$$V(t+\eta, x+z, \Psi_\xi(\cdot)) - V(t, x, \psi(\cdot)) =$$

$$= \partial_t V[p] \cdot \eta + \langle \nabla_x V[p], z \rangle + \partial_\psi V[p] \cdot \xi + o\left(\sqrt{\eta^2 + \|z\|^2 + \xi^2}\right)$$

при $\eta > 0$, $z \in R^n$, $\xi \in [0, \Delta)$, причем $o(\cdot)$ зависит от выбора $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$. (Здесь $\nabla_x V$ — градиент функционала V по переменной x, $\partial_t V$ — частная производная по t, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения.)

З а м е ч а н и е 2. Для того, чтобы функционал V был инвариантно дифференцируем в точке $p = (t, x, \psi(\cdot))$ необходимо, чтобы он имел в этой точке частные производные $\nabla_x V$, $\partial_\psi V$, $\partial_t V$ и достаточно, чтобы они были инвариантно непрерывны в точке p (см. [8, стр. 44]).

Производную $\dot V_{(1)}(t, \phi(\cdot))$ функционала $V(t, x, \phi(\cdot))$ (в точке $(t, \phi(0), \phi(\cdot)$) в силу дифференциального уравнения (1) определим следующим равенством:

$$\dot V_{(1)}(t, \phi(\cdot)) = \langle \nabla_x V, f(t, \phi(\cdot) \rangle + \partial_\phi V + \partial_t V)\Big|_{x=\phi(0)}.$$

Если функционал $V(t, x, \phi(\cdot))$ инвариантно дифференцируем, то для любого решения $x(t)$ уравнения (1) выполняется равенство:

$$\dot v(t) = \dot V_{(1)}(t, x_t(\cdot)). \tag{12}$$

для почти всех t, где $\dot v(t)$ — производная функции $v(t) = V(t, x(t), x_t(\cdot))$.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполняются условия А1–А3, $x(\cdot)$ — ограниченное решение уравнения (1) с ω-предельным множеством $\Lambda^+(x)$. Предположим, что:*

1. *Существует непрерывный, инвариантно дифференцируемый функционал $V(t, x, \phi(\cdot))$, ограниченный снизу и равномерно относительно переменной t непрерывный по переменным $(x, \phi(\cdot))$ на каждом множестве вида $R^1 \times K[0] \times K$, где $K \subset C_\tau$ — компактное множество, $K[0] = \{\phi[0] : \phi(\cdot) \in K\}$.*

2. *Существует ограниченный и равномерно по совокупности аргументов непрерывный на каждом множестве вида $R^1 \times K$ функционал $w(t, \phi(\cdot)) \geqslant 0$, такой что для всех $(t, \phi(\cdot)) \in R^1 \times C_\tau$ выполняется неравенство:*

$$\dot V_{(1)}(t, \phi(\cdot)) \leqslant -w(t, \phi(\cdot)). \tag{13}$$

Тогда для любых $\psi(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ и $T > 0$ существуют предельные отображения V', w', f' (соответствующие одной и той же последовательности $t_n \to +\infty$) и решение

$y(\cdot)$ *включения* (5) *с начальной функцией* $y_0 = \psi(\cdot)$ *, такое, что выполняются соотношения:*

$$y_t(\cdot) \in \Lambda^+(x),\ V'(t, y(t), y_t(\cdot)) = c,\ w'(t, y_t(\cdot)) = 0, \tag{14}$$

для всех $t \in [0, T]$ *, где* c *— некоторая константа, одна и та же для всех функций* $\psi(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t)$ — ограниченное решение уравнения (1) и $\psi(\cdot) \in \in \Lambda^+(x)$, $T > 0$ произвольны. Тогда существует последовательность $t_k \to +\infty$ такая, что $x_{t_k}(\cdot) \to \psi(\cdot)$. В силу равенства (12) и неравенства (13) функция $t \to V(t, x(t), x_t(\cdot))$ является невозрастающей и по предположению теоремы ограничена снизу. Поэтому существует

$$\lim_{t \to +\infty} V(t, x(t), x_t(\cdot)) = c. \tag{15}$$

Из равенства (12) и неравенства (13) следует также

$$V(t + t_k, x(t + t_k), x_{t+t_k}(\cdot)) - V(t_k, x(t_k), x_{t_k}(\cdot)) \leqslant -\int_0^t w(s + t_k, x_{s+t_k})ds \leq 0 \tag{16}$$

для всех $t \in [0, T]$. С учетом равенства (15) и неравенства (16) заключаем, что

$$\lim_{t_k \to +\infty} \int_0^t w(s + t_k, x_{s+t_k})ds = 0. \tag{17}$$

В силу условия 2 теоремы с компактным множеством $K = \{\overline{\cup x_{s+t_k}(\cdot)} : s \in [0, T],\ k = = 1, 2, \ldots\}$ и теоремы Арцела из последовательности функций $w^k(s) = w(s + t_k, x_{s+t_k})$ можно выделить равномерно на отрезке $[0, T]$ сходящуюся к функции $\nu(s)$ подпоследовательность. Из последовательности $x(s + t_k)$ также выделяем равномерно сходящуюся на отрезке $[-\tau, T]$ к функции $y(t)$ подпоследовательность (см. доказательство леммы 1). Не вводя новых обозначений, считаем, что обе последовательности сходятся одновременно. Причем $y(t)$ является решением включения (5) с некоторым предельным отображением f' и $y_t(\cdot) \in \Lambda^+(x)$, $t \geqslant 0$. Используя равномерную ограниченность функции $w(t, \phi(\cdot))$ на множестве $R^1 \times K$ и утверждение 4 леммы 1 (применительно к функции w), заключаем, что $\nu(t) = w'(s, y_s(\cdot))$, где w' — предельная относительно последовательности $\{t_k\}$ функция.

Далее из (17) и теоремы о предельном переходе последовательности функций под знаком интеграла заключаем, что

$$\int_0^t w'(s, y_s(\cdot))ds = 0.$$

Теперь, учитывая непрерывность и знакопостоянность функции w' , заключаем, что $w'(t, y_t(\cdot)) = 0$ для всех $t \in [0, T]$.

Используя равенство (15), условие 1 теоремы и утверждение 4 леммы 1 (применительно к функции $V(t, \phi(0), \phi(\cdot))$), заключаем, что $V'(t, y(t), y_t(\cdot)) = c$ для всех $t \in [0, T]$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. В утверждении теоремы 1 предельные отображения V' , w' , f' могут быть заменены на предельные отображения f^* , V^* , w^* так, что соотношения (14) для них будут выполняться для всех $t \geq 0$.

Т е о р е м а 2. *В условиях теоремы 1 для любого ограниченного решения* $x(\cdot)$ *уравнения* (1) *множество* $\Lambda^+(x)$ *принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству из пересечения множеств*

$$E_V = \{\psi(\cdot) : V^*(\psi(0), \psi(\cdot)) = c\},\ E_w = \{\psi(\cdot) : w^*(\psi(\cdot)) = 0\}.$$

С учетом замечания 3, теорема 2 вытекает из теоремы 1 и является аналогом принципа инвариантности для функцинально-дифференциального уравнения (1).

Будем говорить, что функционал $V(t, x, \phi(\cdot))$ является положительно определенным, если найдется функция $a : R^+ \to R^+$, такая, что $a(u) > 0$ при $u \neq 0$, $a(0) = 0$ и выполняется неравенство $V(t, \phi(0), \phi(\cdot)) \geqslant a(|\phi(0)|)$ для всех $t \in R^1$ и всех $\phi(\cdot)$ из малой окрестности нулевой функции.

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполняются все предположения теоремы 1 и, дополнительно, функционал $V(t, x, \phi(\cdot))$ является положительно определенным. Предположим также, что $0 = f(t, 0, 0)$ для всех t и и множество $E_V \cap E_w$ не содержит полуинвариантных подмножеств уравнения (1) кроме нулевой функции.*

Тогда любое ограниченное решение $x(\cdot)$ уравнения (1) стремится к нулю (т.е. $\|x_t(\cdot)\|_C \to 0$ при $t \to +\infty$) и нулевое решение асимптотически устойчиво.

В заключение отметим, что в упомянутой выше работе [3] исследование основано на топологической динамике функционально-дифференциальных уравнений в некоторой подобласти пространства C_τ, представляющей собой объединение вложенных возрастающих по включению компактных множеств. Соответсвующая компактно открытая топология оказывается метризуемой, пространство — полным, а семейство сдвигов функций — предкомпактным. Тем самым достигается существование предельных функций. В наших исследованиях предельные многозначные в общей ситуации отображения строятся в явном виде на основе теоретико множественных операций по формулам (2), (3) и вопрос об их существовании практически очевиден.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. *Руш Н., Абетс М., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
3. *Андреев А.С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // АиТ. 2009. №9. С. 4-55.
4. *Куратовский К.* Топология, т.1. М.: Мир, 1966. 594 с.
5. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
7. *Толстоногов А.А.* Диифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука. 1986. 276 с.
8. *Ким А.В.* i-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996. 233 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана СО РАН, междисциплинарный проект № 107.

Поступила в редакцию 25 сентября 2011 г.

Finogenko I.A., Chumakova N.A. On a limit equations and attraction for nonautonomous systems with delay. For nonautonomous functional-differential equations property of quasi-invariance for ω-limiting sets and analogue of the La-Salle principle of invariancy by use of Lyapunov functional with constant sign derivative is established.

Key words: functional differential inclusion; Lyapunov functional; limit equations; quasi-invariant set; principle of invariancy; asymptotic stability.