

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект НК-13П(9)).

Chernov A.V. On total preservation of global solvability of controlled boundary value problems. For a wide class of controlled boundary value problems, associated with nonlinear partial differential equations, we formulate sufficient conditions of total (with respect to all admissible controls) preservation of global solvability. We outline some applications of these conditions.

Key words: total preservation of global solvability; functional operator equation; pointwise estimate of solutions.

Чернов Андрей Владимирович, Нижегородский государственный университет, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики, e-mail: chavnn@mail.ru.

УДК 517.929

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ИССЛЕДОВАНИИ АСИМПТОТИКИ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© К. М. Чудинов

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; дифференциальное неравенство; устойчивость.

Устанавливается связь методов исследования устойчивости и неосцилляции решений линейных дифференциальных уравнений с последствием и леммы о дифференциальном неравенстве, обобщающей известное свойство обыкновенных дифференциальных уравнений.

Элементами определяемых ниже пространств являются вещественнозначные скалярные функции: $\mathbf{AC}$ — пространство функций, локально абсолютно непрерывных на полуоси $[0, +\infty)$; $\mathbf{L}$ — пространство функций, локально суммируемых на полуоси $[0, +\infty)$.

Для $x \in \mathbf{AC}$ определим оператор $L: \mathbf{AC} \rightarrow \mathbf{L}$ равенством

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) + \int_0^t x(s) d_s r(t, s),$$

где функция r удовлетворяет:

- 1) условиям, обеспечивающим существование единственного решения задачи Коши $Lx = f$, $x(0) = x_0$ [1, с. 26];
- 2) условию неубывания функции r по второму аргументу: $r(t, s_1) \geq r(t, s_2)$ при $s_1 \geq s_2$.

Одним из направлений развития теории функционально-дифференциальных уравнений является исследование дифференциальных неравенств, ведущее родословную от классической теоремы Чаплыгина [2, гл. 10]. Доказательства функционально-дифференциальных неравенств, как правило, строятся на установлении обратимости некоторого интегрального оператора. Мы рассмотрим возможности исследования асимптотики решений уравнения $Lx = f$ на основании следующего простого факта.

Л е м м а 1. Пусть $v \in \mathbf{AC}$, $t_0 \in [0, +\infty)$ и выполнены условия:

- 1) $v(t) \geq 0$ для всех $t \in [0, t_0)$,
- 2) $v(t_0) = 0$,
- 3) $(Lv)(t) \leq 0$ для почти всех $t \geq 0$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $t_1 \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$, что $v(t_1) \leq 0$.

Асимптотика решений уравнения $Lx = f$ полностью определяется его функцией Коши.

Положим, $\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t\}$.

О п р е д е л е н и е 1. Функция Коши $C: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения $Lx = f$ есть решение начальной задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(t, s)}{\partial t} + \int_s^t C(t, u) d_u r(t, u) &= 0, & t \geq s; \\ C(\xi, s) &= 0, & \xi < s; \\ C(s, s) &= 1. \end{aligned}$$

Следующее известное утверждение оказывается следствием леммы 1.

Л е м м а 2 [1, с. 65]. Пусть функция $v \in \mathbf{AC}$ обладает свойствами:

- 1) $v(t) > 0$ для всех $t \geq 0$,
- 2) $(Lv)(t) \leq 0$ для почти всех $t \geq 0$.

Тогда функция Коши уравнения $Lx = f$ удовлетворяет неравенству $C(t, s) \geq v(t)/v(s)$ при всех $(t, s) \in \Delta$.

Леммы 1 и 2 можно рассматривать как основу метода, позволяющего устанавливать точные области устойчивости и знакоопределенности решений уравнений с последствием в пространствах параметров уравнения.

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \sum_{k=1}^n a_k x(t - r_k(t)) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $a_k > 0$, $r_k: [a, +\infty) \rightarrow [0, \omega_k]$, $k = 1, \dots, n$, являющееся частным случаем уравнения $Lx = 0$ с определенным выше оператором L . Семейство уравнений (1), определяемое набором параметров a , a_k , ω_k , назовем устойчивым, если устойчивы все входящие в него уравнения (т. е. уравнения со всевозможными запаздываниями r_k).

Заметим, что если решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) + ay(t) + \sum_{k=1}^n a_k y(t - \omega_k) &= 0, & t \geq 0, \\ y(\xi) &= 1, & \xi \leq 0, \end{aligned}$$

положительно на некотором отрезке $[0, b]$, то оно не возрастает на нём. Таким образом, $(Ly)(t) = \sum_{k=1}^n a_k [y(t - r_k(t)) - y(t - \omega_k)] \leq 0$ при $t \in [0, b]$. Значит, для функции $v = y - x$, где x есть решение уравнения $Lx = 0$, оказывается применима лемма 1.

Устойчивость всех уравнений семейства определяется величиной первого минимума функции y : семейство экспоненциально устойчиво если и только если он меньше 1. Таким образом, задача установления области устойчивости неавтономного уравнения сводится к исследованию решения автономного уравнения. Для некоторых случаев уравнения (1) в работах [3, 4] этим путем получены точные области экспоненциальной и равномерной устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Дифференциальные уравнения с обыкновенными производными. Пермь: изд-во Пермск. ун-та, 2001.

2. Азбелев Н.В., Максимов П.В., Разматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

3. Малыгина В.В., Куликов А.Ю., Чудинов К.М. Неулучшаемые достаточные условия устойчивости скалярных уравнений с несколькими запаздываниями // Вычислительная математика и механика. Пермь, 2008. № 7. С. 106–120.

4. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Об устойчивости знакоопределенных решений скалярных уравнений с несколькими запаздываниями // Вестник ПГТУ. Механика. Пермь, 2009. № 1. С. 28–45.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

Chudinov K.M. Differential inequalities in investigation of equations with aftereffect. We establish a link between methods of investigation of stability and nonoscillation of solutions to linear differential equations with aftereffect and the differential inequality lemma that generalizes a well-known property of ordinary differential equations.

Key words: functional-differential equation; differential inequality; stability.

Чудинов Кирилл Михайлович, Пермский государственный технический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и механики, e-mail: cyril@list.ru.

УДК 517.91

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© И. В. Шарафутдинов

Ключевые слова: бифуркация; негладкая система; стационарное решение.

Рассматривается задача о бифуркации стационарных решений динамических систем с негладкими правыми частями. Предлагается признак бифуркации, итерационная процедура и асимптотические формулы для бифурцирующих решений.

Рассматривается динамическая система

$$x' = F(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Пусть $F(0, \lambda) \equiv 0$, т. е. $x = 0$ — стационарное решение системы (1) при всех λ .

О п р е д е л е н и е 1. Число λ_0 называется точкой бифуркации стационарных решений системы (1), если существует такая последовательность $\{\lambda_n\} \rightarrow \lambda_0$, что при каждом λ_n система (1) имеет ненулевое стационарное решение x_n , причем $\|x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Предполагается, что свойство гладкости функции $F(x)$ нарушается на некоторой $(N - 1)$ -мерной гиперплоскости $\Pi_0 = \{x : (x, b_0) = \alpha_0\}$, где $b_0 \in \mathbb{R}^N$ — некоторый ненулевой вектор и число $\alpha_0 \geq 0$.

Пусть правая часть системы (1) представима в виде

$$F(x, \lambda) = \begin{cases} F_+(x, \lambda), & (x, b_0) > \alpha_0, \\ F_0(x, \lambda), & (x, b_0) = \alpha_0, \\ F_-(x, \lambda), & (x, b_0) < \alpha_0, \end{cases}$$