ющую линейную зависимость $M(t)$ от переменных $A(t)$ и $\hat{s}(t)$:

$$M(t) = aA(t) - b\hat{s}(t).$$

Обозначив $\gamma = \xi a - \mu$ параметр, определяющий эффективность предприятия и темп его роста, получаем:

$$dA/dt = \gamma A(t) + (1+\lambda)K(t) - \xi(b\hat{s}(t) + \hat{S}(t)) + \alpha\delta(t).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Протасов, Д.Н.* Развитие модели кредитно-инвестиционных ресурсов промышленного предприятия // Вопросы современной науки и практики / Университет им. В.И. Вернадского. Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. Вып. 1.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

Protasov D.N. A generalized dynamic model of analysis of enterprises development strategies through various funding schemes. The economic-mathematical model permitting to investigate the dynamic of the enterprise development depending on the selected investment strategy are introduced.

*Key words*: investments; economic-mathematical models; finance support; dynamic model; dynamics of development.

Протасов Д.Н. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат экономических наук, старший преподаватель кафедры высшая математики, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru.

УДК 519.622.2

# ОТЫСКАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**© А.Н. Пчелинцев, А.Ю. Поветьев**

Ключевые слова: периодическое решение; система обыкновенных дифференциальных уравнений; последовательные приближения.
В докладе рассмотрен способ построения приближений к периодическим решениям одного класса неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В основу положена схема последовательных приближений с использованием символьных вычислений. Приведены результаты вычислительного эксперимента для системы второго порядка.

На практике часто возникает задача построения периодических решений нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ представляет собой сумму

$$f(t,x) = \varphi(x) + h(t)$$

многомерного многочлена $\varphi(x)$ и тригонометрического полинома $h(t)$, являющегося $T$-периодической векторной функцией.

Многие из теорем существования периодических решений системы (1) [1] используют тот фундаментальный факт, что такие решения полностью определяются неподвижными точками оператора сдвига по траекториям системы. Однако использование данных теорем для непосредственного нахождения нужного периодического решения, скорее всего, не представляется возможным.

Пусть известно, что система (1) имеет единственное $T$-периодическое решение $x^*(t)$. Примерами систем, имеющих единственное периодическое решение, являются системы с конвергенцией [2]. Рассмотрим один класс таких систем, для которого удается предложить способ построения приближения к решению $x^*(t)$.

Пусть $C^*$ – вектор, для которого

$$x^*(0) = C^*.$$

Здесь для простоты рассуждений мы полагаем, что начальный момент времени равен нулю. Тогда, если удастся определить вектор $C^*$, то мы сумеем построить искомое периодическое решение.

Введем условия, накладываемые на функцию $f$:

1. Пусть $S_r \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутый шар радиуса $r$, содержащий значения решения $x^*(t)$, $S_R$ – замкнутый шар радиуса $R$, причем $S_r \subset S_R$, и существует такое положительное число $l < 1/(2T)$, что для любых $p, q \in S_R$ имеет место неравенство

$$|\varphi(p) - \varphi(q)| \leqslant l|p - q|.$$

2. Существует такое положительное число $M \leqslant (R - r)/(2T)$, что для всех $x \in S_R$ и любых $t \in [0, T]$ выполняется неравенство

$$|f(t,x)| \leqslant M.$$

В работе [3] показано, что в этом случае последовательные приближения, определяемые формулами

$$y_0(t, C) \equiv C,$$

$$y_{m+1}(t, C) = C + \int_0^t \left[ f(s, y_m(s, C)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, y_m(\tau, C)) d\tau \right] ds \qquad (2)$$

для любого $C \in S_r$ сходятся равномерно для всех $t \in [0, T]$ к некоторой периодической функции $y(\cdot, C)$. Причем, если выбрать $C = C^*$, то окажется, что

$$y(t, C^*) = x^*(t).$$

Исходя из формулы (2), каждая итерация вычисляется в символьной форме. При этом после преобразований тригонометрических функций под интегралом всегда можно получить тригонометрический полином с нулевым средним интегральным значением. Аналитическая форма представления приближения к периодическому решению удобна тем, что дает возможность провести анализ гармоник, составляющих это приближение. После вычисления очередной итерации строится функция

$$\theta_m(C) = \left| \int_0^T f(\tau, y_m(\tau, C)) d\tau \right|^2,$$

минимум которой и даст приближение к вектору $C^*$.

В качестве примера была рассмотрена нелинейная система второго порядка с конвергенцией вида (1), где

$$x(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \; \varphi(x) = \begin{bmatrix} \eta - Q(\xi) \\ -g(\xi) \end{bmatrix}, \; h(t) = \begin{bmatrix} 1/2400 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \sin(24t),$$

$Q(\xi) = 0,01\xi(1 + 2\xi^2/3)$, $g(\xi) = 0,03\xi$. Обнаружено, что на первой и второй итерациях значения найденных приближений к вектору $C^*$ одинаковы, и

$$C^* \simeq \begin{bmatrix} -1/57600 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Полученный вектор был проверен с помощью комплекса программ, описанного в работе [4], на возврат решения системы (1) в окрестность начального условия через период (цикл на рис. 1).

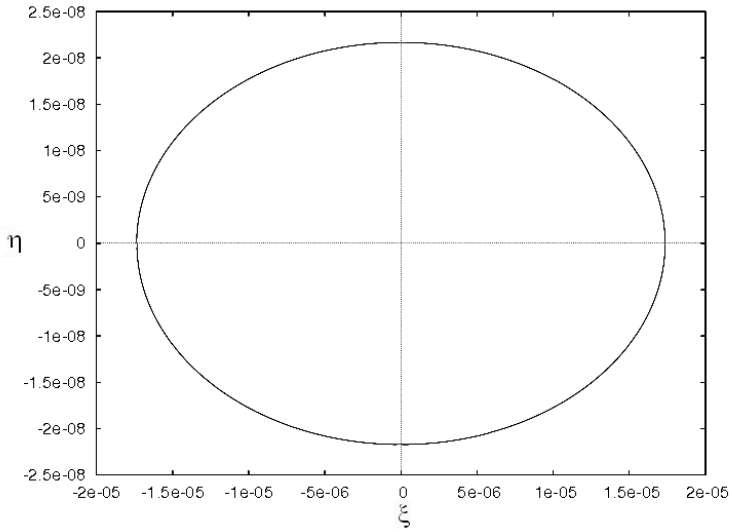


**Рис. 1.** Цикл, соответствующий найденному вектору $C^*$


ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
2. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964.
3. *Пчелинцев А.Н., Поветьев А.Ю., Подольский В.Е.* О построении периодических решений одного класса неавтономных систем дифференциальных уравнений в распределенной компьютерной среде // Вестник ТГТУ. 2011. Т. 17. №2. С. 502-512.
4. *Пчелинцев А.Н.* Численные методы и обобщенно-периодические решения динамических систем. Саарбрюккен (Германия): Lambert Academic Publishing, 2010.



Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10–07–00136, № 11–07–00098).



Pchelintsev A.N., Povetyev A.Yu. Finding periodic solutions of nonautonomous systems a class differential equations. The report describes a method for constructing approximations to the periodic solutions of a class of nonautonomous systems of ordinary differential equations. It is based on the scheme of successive approximations using symbolic computation. There are listed the results of computing experiment for a second-order system.

*Key words*: periodical solution; system of ordinary differential equations; scheme of successive approximations.

Пчелинцев Александр Николаевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, e-mail: pchelintsev.an@yandex.ru.

Поветьев Алексей Юрьевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры систем автоматизированного проектирования, e-mail: sktm88@mail.ru.

УДК 517.984

# АСИМПТОТИКА ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОДНОГО МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

© Т.Х. Расулов

*Ключевые слова*: матричный оператор; резонанс с нулевой энергией; дискретный спектр.

Рассматривается матричный оператор Установлено, что этот оператор имеет бесконечное число отрицательных собственных значений, накапливающихся к нулю, если соответствующая обобщенная модель Фридрихса имеет резонанс с нулевой энергией. Найдена асимптотика дискретного спектра.

Пусть $\mathbf{T}^3$ — трехмерный тор, т. е. куб $(-\pi,\pi]^3$ с соответствующим отождествлением противоположных граней, $\mathbf{C}$ — одномерное комплексное пространство, $L_2(\mathbf{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbf{T}^3$, $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbf{T}^3)^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbf{T}^3)^2$ и симметричных относительно перестановки двух переменных.

Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0=\mathbf{C}$, $\mathcal{H}_1=L_2(\mathbf{T}^3)$ и $\mathcal{H}_2=L_2^{\mathrm{s}}((\mathbf{T}^3)^2)$, т. е. $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$.

Рассмотрим матричный оператор $H$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как

$$H=\begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & 0 \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{21} & H_{22} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $H_{lk}:\mathcal{H}_k\to\mathcal{H}_l$, $k,l=0,1,2$ определяются по формулам

$$(H_{00}f_0)_0=w_0f_0,\quad (H_{01}f_1)_0=\int\limits_{\mathbf{T}^3} v_1(t)f_1(t)dt,\quad (H_{10}f_0)_1(p)=v_1(p)f_0,$$