УДК 519.6

СРАВНЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ И ОПТИМИЗАЦИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

© В.И. Левин

Levin V.I. Intervals comparison and optimisation under the conditions of uncertainty. A general problem was stated to compare the intervals so as to optimise the systems with undefined (interval) parameters. A solution of the problem was obtained using the notion of intervals closeness measure. Generally, this solution reduces comparison of intervals to that of their centres. In a particular case, where overlapping one another is not allowed, the solution obtained becomes the known: the interval shifted to the right is larger.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] предложен подход к оптимизации систем с неопределенными интервально заданными параметрами, основанный на принципах сравнения интервалов чисел, вытекающих из общих принципов интервальной математики [4]. Этот подход позволил сводить оптимизационные задачи с интервальными параметрами к двум аналогичным задачам с детерминированными (точно заданными) параметрами. В результате оказалось возможным эффективное решение многих задач оптимизации в новой, интервальной постановке [1, 3, 5–8]. Однако предложенный подход имел ограничение, связанное с невозможностью сравнения интервалов, один из которых накрывает другой. Это сужало класс практических задач интервальной оптимизации, допускающих решение.

В настоящей статье обоснован более общий подход к оптимизации систем с интервальными параметрами. В нем, кроме общих принципов интервальной математики, позволяющих переносить любые операции над числами (в частности, операция взятия максимума и минимума) на интервалы, использовано также понятие меры близости двух интервалов. Это позволило единообразно и строго обоснованно сравнивать любые интервалы, находящиеся в произвольных отношениях между собой (в том числе, накрывающие друг друга), и выбирать максимальный и минимальный из них. Благодаря этому появилась принципиальная возможность решать любые практические задачи оптимизации систем с интервальными параметрами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Согласно [1–3, 9], сравнение интервальных чисел, в соответствии с общими принципами интервальной математики [4], проводится так. Пусть $\widetilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\widetilde{b}=[b_1,b_2]$ – произвольная пара таких чисел. В соответствии с указанными принципами определим операции $\vee=\max$ и $\wedge=\min$ над интервалами $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ как теоретико-множественные обобщения соответствующих операций над вещественными числами

$$\begin{aligned}\widetilde{a}\vee\widetilde{b}&=\{a\vee b\mid a\in\widetilde{a},b\in\widetilde{b}\},\\ \widetilde{a}\wedge\widetilde{b}&=\{a\wedge b\mid a\in\widetilde{a},b\in\widetilde{b}\}\end{aligned}. \qquad (1)$$

Результаты операций $\vee$ и $\wedge$ над интервалами всегда существуют в виде соответствующих интервалов и определяются по формулам

$$\begin{aligned}\widetilde{a}\vee\widetilde{b}&=[a_1,a_2]\vee[b_1,b_2]=[a_1\vee b_1,\ a_2\vee b_2];\\ \widetilde{a}\wedge\widetilde{b}&=[a_1,a_2]\wedge[b_1,b_2]=[a_1\wedge b_1,\ a_2\wedge b_2]\end{aligned}. \qquad (2)$$

Операции $\vee,\wedge$ часто называют операциями непрерывной логики (НЛ) – дизъюнкцией и конъюнкцией, так как они обобщают аналогичные операции дискретной логики на непрерывный случай. Отношения неравенства интервалов определяются аналогично отношениям неравенства вещественных чисел. При этом используются операции взятия максимума $\vee$ и минимума $\wedge$ (1)

$$\begin{aligned}(\widetilde{a}\ge\widetilde{b})&\Leftrightarrow(\widetilde{a}\vee\widetilde{b}=\widetilde{a},\widetilde{a}\wedge\widetilde{b}=\widetilde{b}),\\ (\widetilde{a}>\widetilde{b})&\Leftrightarrow(\widetilde{a}\vee\widetilde{b}=\widetilde{a},\widetilde{a}\wedge\widetilde{b}=\widetilde{b},\widetilde{a}\ne\widetilde{b})\end{aligned}. \qquad (3)$$

Как видно из (3), для того чтобы некоторый интервал $\widetilde{a}$ был большим (большим или равным) из двух интервалов $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$, нужно, чтобы операция $\vee$ над этими интервалами давала интервал $\widetilde{a}$, а операция $\wedge$ – интервал $\widetilde{b}$. Однако проблема заключается в том, что операции $\vee$ и $\wedge$, введенные по формулам (1) и вычисляемые по формулам (2), не всегда имеют своим результатом один из двух интервалов $\widetilde{a},\widetilde{b}$, фигурирующих в операции. В таких случаях интервалы $\widetilde{a},\widetilde{b}$ оказываются несравнимыми по отношениям $\ge,>$ в смысле определений (3). Случаи сравнимости и несравнимости интервалов в смысле (3) полностью описываются следующими предложениями [1–3].

Т е о р е м а 1. Для того чтобы два интервала $\widetilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\widetilde{b}=[b_1,b_2]$ были сравнимы по отношению $\geq$ и находились в отношении $\widetilde{a} \geq \widetilde{b}$ в смысле (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств $\widetilde{a}_1 \geq \widetilde{b}_1, \widetilde{a}_2 \geq \widetilde{b}_2$, а для того, чтобы они были несравнимы по этому отношению, необходимо и достаточно выполнения хотя бы одной из систем неравенств: $a_1 < b_1$, $a_2 > b_2$ или $b_1 < a_1, b_2 > a_2$.

Согласно теореме 1, сравнимы по отношению $\geq$ только совпадающие интервалы либо интервалы, сдвинутые относительно друг друга вдоль числовой оси. При этом сдвинутый вправо (влево) интервал является большим (меньшим). Если же один интервал накрывает другой, то они несравнимы.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы два интервала $\widetilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\widetilde{b}=[b_1,b_2]$ были сравнимы по отношению $>$ и находились в отношении $\widetilde{a} > \widetilde{b}$ в смысле (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялась хотя бы одна из систем неравенств $\widetilde{a}_1 \geq \widetilde{b}_1, \widetilde{a}_2 > \widetilde{b}_2$ или $\widetilde{a}_1 > \widetilde{b}_1, \widetilde{a}_2 \geq \widetilde{b}_2$, а для того чтобы они были несравнимы по этому отношению, необходимо и достаточно выполнения хотя бы одной из систем неравенств (равенств): $a_1 < b_1, a_2 > b_2$ или $b_1 < a_1, b_2 > a_2$ или $a_1 = b_1, a_2 = b_2$.

В соответствии с теоремой 2, сравнимы по отношению $>$ только интервалы, сдвинутые относительно друг друга вдоль числовой оси. При этом сдвинутый вправо (влево) интервал является большим (меньшим). Если же один интервал накрывает другой, то они несравнимы. Естественно, что несравнимыми по отношению $>$ оказываются также равные интервалы, ведь они находятся в отношении равенства $=$, несовместимом с отношением $>$.

Как показывают теоремы 1, 2, подход, основанный только на общих принципах интервальной математики, не позволяет сравнивать интервалы, накрывающие друг друга, ни по одному из отношений $>, \geq, =$. Это приводит к невозможности получения в указанных случаях решений задач оптимизации систем с неточно известными (интервальными) параметрами. С практической точки зрения это нежелательно. Возникает задача разработки разумных правил сравнения накрывающих друг друга интервалов по отношениям $>, \geq, =$. Эти правила должны быть совместимы с полученными ранее (см. теоремы 1, 2) и в совокупности давать возможность сравнения любых интервалов по набору отношений $>, \geq, =$. В результате решение задач оптимизации систем с интервальными параметрами окажется возможным во всех, без исключения, случаях.

3. ИДЕЯ РЕШЕНИЯ

Идея решения поставленной задачи проста и состоит в следующем. Рассмотрим два принципиально различных возможных взаиморасположения сравниваемых интервалов $\widetilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\widetilde{b}=[b_1,b_2]$: 1) сдвиг по одной или обеим границам интервалов либо полный сдвиг (когда области $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ не пересекаются) (рис. 1); 2) накрытие одним интервалом $\widetilde{a}$ другого $\widetilde{b}$ (рис. 2). Из рис. 1 хорошо видно, что в случае сдвига интервалов операция взятия максимума (дизъюнкция $\vee$ НЛ), определяемая согласно (1), (2), дает сдвинутый вправо интервал $\widetilde{a}$, а операция взятия минимума (конъюнкция $\wedge$ НЛ), определяемая там же, дает сдвинутый влево интервал $\widetilde{b}$. Таким образом, в этом случае есть все основания для того, чтобы, в соответствии с определением (3), принять интервал $\widetilde{a}$ за больший, а интервал $\widetilde{b}$ – за меньший, т. е. выполнить сравнение интервалов по отношениям $\geq, >$. Однако из рис. 2 также хорошо видно, что в случае накрытия одним интервалом $\widetilde{a}$ другого $\widetilde{b}$ операция взятия максимума (дизъюнкция $\vee$ НЛ) и операция взятия минимума (конъюнкция $\wedge$ НЛ) этих интервалов дают новые интервалы, отличные как от $\widetilde{a}$, так и от $\widetilde{b}$. В связи с этим сравнение интервалов $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ на основании определения (3) с целью выделения большего и меньшего из них оказывается в этом случае невозможным.

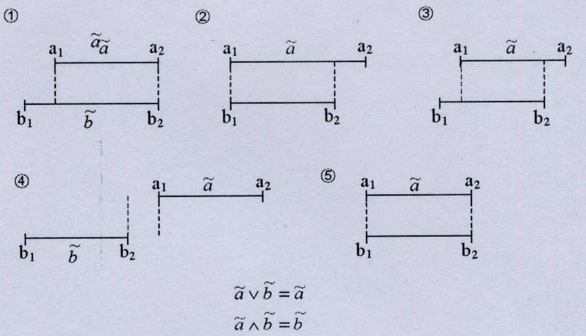

Рис. 1. Сдвиг интервала $\widetilde{a}$ вправо относительно интервала $\widetilde{b}$ (1 – сдвиг по левой границе; 2 – сдвиг по правой границе; 3 – сдвиг по обеим границам; 4 – полный сдвиг; 5 – нулевой сдвиг (равенство)

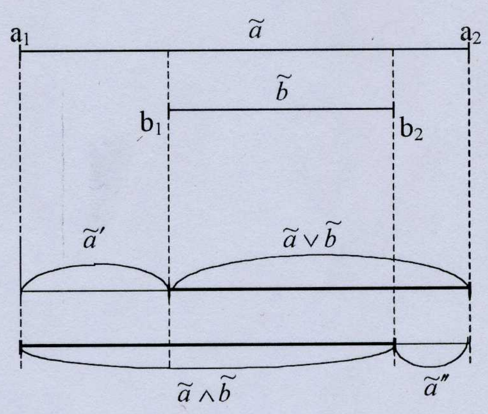

Рис. 2. Интервал $\widetilde{a}$ накрывает интервал $\widetilde{b}$ ($\widetilde{a} \vee \widetilde{b}$ – взятие максимума интервалов $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$, согласно (1), (2), $\widetilde{a} \wedge \widetilde{b}$ – взятие их минимума согласно (1), (2)

Сказанное означает, что общие принципы интервальной математики, позволяющие распространять любые операции над вещественными числами на случай интервальных чисел (пример распространения операций $\max, \min$ дает формула (1)), недостаточны для придания новым операциям тех же полезных свойств, которыми обладают исходные операции над вещественными числами. Поэтому указанные принципы следует дополнить новыми, позволяющими получать нужные свойства. В нашем случае несравнимости накрывающих друг друга интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$ по отношениям $>, \geq, =$ (рис. 2) в качестве нового естественно взять принцип близости интервалов. Действительно, если выполненные в точном соответствии с определениями (1), (2) операции взятия максимума $\tilde{a} \vee \tilde{b}$ и минимума $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$ интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$ не дают ни $\tilde{a}$, ни $\tilde{b}$, тем самым не позволяя сравнить эти интервалы, то можно в качестве максимального принять тот из интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$, который находится ближе к $\tilde{a} \vee \tilde{b}$, а в качестве минимального – тот из $\tilde{a}, \tilde{b}$ который находится ближе к $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$. Таким образом, для решения нашей задачи остается лишь определить логически, математически и содержательно обоснованную меру близости интервалов или двойственную ей меру удаленности.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определим меру удаленности U двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ как суммарную длину всех подинтервалов, которыми различаются $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, включая подинтервал $\tilde{P}$ – промежуток между $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, присутствующий в случаях, когда $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не пересекаются. Таким образом, U выражается как

$$U = |\tilde{a} \setminus \tilde{b}| + |\tilde{b} \setminus \tilde{a}| + |\tilde{P}|. \tag{4}$$

Здесь символ $|\tilde{c}|$ означает длину интервалов $\tilde{c}$. В соответствии с определением (4), удаленность совпадающих интервалов равна нулю, удаленность, например, интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ на рис. 1, случай 1–4, составляет:

1) $U = a_1 - b_1$;
2) $U = a_2 - b_2$;
3) $U = a_1 - b_1 + a_2 - b_2$;
4) $U = b_2 - b_1 + a_1 - b_2 + a_2 - a_1 = a_2 - b_1$,

а удаленность интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ на рис. 2 равна $U = b_1 - a_1 + a_2 - b_2$. Мера близости B двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, по определению, является величиной, дополнительной к мере их удаленности U. Т. е. чем больше (меньше) U, тем меньше (больше) B. При этом конкретная форма математического соотношения между U и B может быть различной, например, такой

$$B = 1/U. \tag{5}$$

Согласно (4), (5), при увеличении меры удаленности интервалов U от $U_{\min} = 0$ (что соответствует удаленности совпадающих интервалов) до $U_{\max} = \infty$ (что соответствует удаленности бесконечно разнесенных интервалов) мера близости интервалов B уменьшается от $B_{\max} = \infty$ до $B_{\min} = 0$.

Мера $U(\tilde{a}, \tilde{b})$ удаленности двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ обладает всеми свойствами обычного расстояния между объектами. А именно, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. Мера $U(\tilde{a}, \tilde{b})$ удаленности интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ обладает следующими свойствами:

$$U(\tilde{a}, \tilde{a}) = 0, \; U(\tilde{a}, \tilde{b}) > 0 \text{ при } \tilde{a} \neq \tilde{b} \tag{6}$$

(удаленность совпадающих интервалов равна нулю, для несовпадающих интервалов она положительна),

$$U(\tilde{a}, \tilde{b}) = U(\tilde{b}, \tilde{a}) \tag{7}$$

(перестановочное свойство функции U, измеряющей удаленность интервалов, т. е. удаленность $\tilde{a}$ от $\tilde{b}$ равна удаленности $\tilde{b}$ от $\tilde{a}$),

$$U(\tilde{a}, \tilde{b}) + U(\tilde{b}, \tilde{c}) \geq U(\tilde{a}, \tilde{c}) \tag{8}$$

(неравенство треугольника).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Согласно (4), $U(\tilde{a}, \tilde{a}) = |\tilde{a} \setminus \tilde{a}| + |\tilde{a} \setminus \tilde{a}| + |\varnothing| + |\varnothing| + |\varnothing| + |\varnothing|$, где $\varnothing$ – пустой интервал. Но $|\varnothing| = 0$. Отсюда следует $U(\tilde{a}, \tilde{a}) = 0$. При $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ $\tilde{a} \setminus \tilde{b} \neq 0$ или $\tilde{b} \setminus \tilde{a} \neq 0$, так что хотя бы одно слагаемое выражения (4) положительно и потому $U(\tilde{a}, \tilde{b}) > 0$. Далее, согласно (4), при перестановке местами аргументов $\tilde{a}, \tilde{b}$ выражение функции $U(\tilde{a}, \tilde{b})$ не изменяется. Это доказывает справедливость формулы (7). Доказательство неравенства (8) можно получить, непосредственно проверив его выполнение в различных возможных случаях взаиморасположения интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ (число таких случаев конечно). Процедуру проверки покажем для двух крайних случаев: 1) все три интервала $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ не пересекаются; 2) все три интервала пересекаются и образуют последовательное включение (накрытие). В случае 1 положим порядок следования интервалов слева направо $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$. Тогда левая часть неравенства (8) равна $|\tilde{a}| + 2|\tilde{b}| + |\tilde{c}| + |\tilde{P}(\tilde{a}, \tilde{b})| + |\tilde{P}(\tilde{b}, \tilde{c})|$, а правая часть – $|\tilde{a}| + |\tilde{b}| + |\tilde{c}| + |\tilde{P}(\tilde{a}, \tilde{b})| + |\tilde{P}(\tilde{b}, \tilde{c})|$, где $\tilde{P}(\cdot)$ – промежуток между интервалами в скобке. Таким образом, неравенство (8) справедливо и имеет вид строгого неравенства $>$. При других порядках следования интервалов проверка и ее результат аналогичны. В случае 2 положим порядок последовательного включения интервалов $\tilde{a} \supset \tilde{b} \supset \tilde{c}$. Тогда левая часть неравенства (8) равна $|\tilde{a} \setminus \tilde{b}| + |\tilde{b} \setminus \tilde{c}| = |\tilde{a} \setminus \tilde{c}|$, а правая часть – $|\tilde{a} \setminus \tilde{c}|$. Таким образом, неравенство (8) и здесь справедливо и имеет вид строгого равенства $=$. При других порядках последовательного включения интервалов проверка аналогична, но результат может иметь и форму строгого неравенства $>$.

Введенная мера $U(\tilde{a}, \tilde{b})$ удаленности интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$ позволяет сформулировать общее свойство интервалов, которое дает возможность определять их сравнимость во всех случаях, в том числе, в тех, когда сравнение по ранее известному принципу (3) оказывается невозможным. Это, как уже говорилось в § 2, случаи, когда один из интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$ накрывает (включает) другой. Соответствующее частное свойство, позволяющее сравнивать интервалы только в случаях сдвига одного из них относительно другого, принимает вид эквивалентности [1–3]

$$(\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}), \tag{9}$$

т. е. если операция $\vee$ взятия максимума согласно (1) дает один из интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$, то операция $\wedge$ взятия минимума согласно (1) дает другой из них, и обратно. Другими словами, равенства $\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}$, $\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}$ должны выполняться одновременно. Именно это свойство интервалов позволило ранее определить сравнение сдвинутых друг к другу интервалов по отношениям $\geq, >$ в форме эквивалентностей (3). Однако, поскольку в случае, когда один из интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$ накрывает другой, операции $\tilde{a} \vee \tilde{b}$ и $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$ не дают ни $\tilde{a}$, ни $\tilde{b}$ (см. рис. 2), свойство (9), хотя оно всегда выполняется, не может быть взято за основу, позволяющую вывести подобные (3) правила сравнения любых интервалов, в т. ч. накрывающих друг друга, по отношениям $\geq, >$. Более общее свойство интервалов, позволяющее это сделать, имеет вид

$$\begin{gathered} U(\tilde{a}, \tilde{a} \vee \tilde{b}) \underset{=}{<} U(\tilde{b}, \tilde{a} \vee \tilde{b}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow U(\tilde{a}, \tilde{a} \wedge \tilde{b}) \underset{=}{>} U(\tilde{b}, \tilde{a} \wedge \tilde{b}) \end{gathered}. \tag{10}$$

С в о й с т в о (10) означает, что если один из интервалов $\tilde{a}$ ближе к дизъюнкции $\vee$ (максимуму) интервалов $\tilde{a} \vee \tilde{b}$, чем другой $\tilde{b}$, то он дальше от конъюнкции $\wedge$ (минимума) интервалов $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$, чем $\tilde{b}$, и обратно – если $\tilde{a}$ дальше от $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$, чем $\tilde{b}$, то он ближе к $\tilde{a} \vee \tilde{b}$, чем $\tilde{b}$. Знаки $=$ в (10) показывают, что при одинаковой удаленности интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ от $\tilde{a} \vee \tilde{b}$ оба они одинаково удалены и от $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$, и обратно – при одинаковой удаленности $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ от $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$ оба одинаково удалены и от $\tilde{a} \vee \tilde{b}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о с в о й с т в а (10). Рассмотрим два случая. *Случай 1*: интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ сдвинуты относительно друг друга (рис. 1). При этом операция $\vee$ взятия максимума интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$ дает один из них, а операция $\wedge$ взятия их минимума – другой. Пусть для определенности $\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}$, $\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}$. Тогда свойство (10) принимает вид

$$\begin{gathered} [\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}, 0 \underset{=}{<} U(\tilde{b}, \tilde{a} \vee \tilde{b})] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}, U(\tilde{a}, \tilde{a} \wedge \tilde{b}) \underset{=}{>} 0] \end{gathered}. \tag{11}$$

Неравенства в левой и правой частях соотношения (11) в силу свойств (6) функции U всегда выполняются. Поэтому, как достоверные события, они могут быть опущены, в результате чего соотношение (11) принимает вид (9). Таким образом, в случае 1 свойство (10) эквивалентно свойству (9), справедливость которого доказана [1–3]. Поэтому и свойство (10) в этом случае справедливо.

Случай 2. Интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ накрывают друг друга (рис. 2). При этом операция $\vee$ взятия максимума и операция $\wedge$ взятия минимума интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}$ не дают ни один из этих интервалов. Поэтому, в силу свойств (6) функции U, во всех неравенствах соотношения (10) левые и правые части положительны. Проверим совместное выполнение этих неравенств. Примем для определенности, что $\tilde{a}$ накрывает $\tilde{b}$ (рис. 2). Тогда, как видно из рис. 2, левые и правые части неравенств в (10) выражаются в виде следующих отрезков

$$\begin{gathered} U(\tilde{a}, \tilde{a} \vee \tilde{b}) = |\tilde{a}'|, U(\tilde{b}, \tilde{a} \vee \tilde{b}) = \\ = |\tilde{a}''|, U(\tilde{a}, \tilde{a} \wedge \tilde{b}) = |\tilde{a}''|, U(\tilde{b}, \tilde{a} \wedge \tilde{b}) = |\tilde{a}'| \end{gathered}. \tag{12}$$

Подставив выражения (12) в соотношение (10), получим эквивалентное соотношение

$$|\tilde{a}'| \underset{=}{<} |\tilde{a}''| \Leftrightarrow |\tilde{a}''| \underset{=}{>} |\tilde{a}'|. \tag{13}$$

Но соотношение (13) всегда справедливо. Поэтому и соотношение (свойство) (10) в случае 2 справедливо.

Доказанное свойство интервалов (10) обобщает их свойство (9), но, в отличие от (9), не требует, чтобы операция $\vee$ взятия максимума согласно (1) двух интервалов давала один из них, а операция $\wedge$ взятия их минимума – другой, что возможно только для сдвинутых один относительно другого интервалов. Благодаря этому свойство (10) позволяет ввести понятие сравнимости по отношениям $>, \geq, =$ для произвольных интервалов, независимо от их расположения друг относительно друга. В этом общем случае различные возможные отношения между интервалами определяются в виде

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \Leftrightarrow [U(\tilde{a},\, \tilde{a} \vee \tilde{b}) \leq \\
&\qquad \leq U(\tilde{b},\, \tilde{a} \vee \tilde{b}), U(\tilde{a},\, \tilde{a} \wedge \tilde{b}) \geq U(\tilde{b},\, \tilde{a} \wedge \tilde{b})], \\
&(\tilde{a} > \tilde{b}) \Leftrightarrow [U(\tilde{a},\, \tilde{a} \vee \tilde{b}) < \\
&\qquad < U(\tilde{b},\, \tilde{a} \vee \tilde{b}), U(\tilde{a},\, \tilde{a} \wedge \tilde{b}) > U(\tilde{b},\, \tilde{a} \wedge \tilde{b})], \\
&(\tilde{a} = \tilde{b}) \Leftrightarrow [U(\tilde{a},\, \tilde{a} \vee \tilde{b}) = \\
&\qquad = U(\tilde{b},\, \tilde{a} \vee \tilde{b}), U(\tilde{a},\, \tilde{a} \wedge \tilde{b}) = U(\tilde{b},\, \tilde{a} \wedge \tilde{b})].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Как видно из (14), для того чтобы некоторый интервал $\tilde{a}$ был большим (большим или равным) из двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, нужно чтобы интервал $\tilde{a}$ был ближе (ближе или равноудален) к результату операции $\vee = \max$ (1) над $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ и дальше (дальше или равноудален) от результата операции $\wedge = \min$ (1) над $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, чем интервал $\tilde{b}$. Из (14) также видно, что для равенства двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ нужно, чтобы они были равноудалены от результата операции $\vee$ (1) над $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ и равноудалены от результата операции $\wedge$ (1) над $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$.

Нижеследующее основное предложение полностью описывает условия, при которых произвольные интервалы, независимо от их расположения друг относительно друга, находятся в одном из отношений $>, \geq, =$.

Т е о р е м а 4. Для того чтобы два произвольных интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ находились в одном из отношений $>, \geq, =$ в смысле (14), необходимо и достаточно, чтобы их центры $M_a = (a_1 + a_2)/2$ и $M_b = (b_1 + b_2)/2$ находились в том же отношении как вещественные числа, т. е.

$$
(\tilde{a} \square \tilde{b}) \Leftrightarrow (M_a \square M_b), \qquad \square \in \{\geq, >, =\}. \tag{15}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Рассмотрим два случая. Случай 1: интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ сдвинуты относительно друг друга (рис. 1). В этом случае согласно теореме 1 $(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a}_1 \geq \tilde{b}_1, \tilde{a}_2 \geq b_2) = A$. Но, $A \Leftrightarrow (M_a \geq M_b)$, следовательно, $(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \Leftrightarrow (M_a \geq M_b)$. В частности, отношению $=$ соответствует условие $(\tilde{a} = \tilde{b}) \Leftrightarrow \; \Leftrightarrow (M_a = M_b)$. Далее, согласно теореме 2, $(\tilde{a} > \tilde{b}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\tilde{a}_1 > \tilde{b}_1, \tilde{a}_2 \geq b_2) \cup (a_1 \geq b_1, \;\; a_2 > b_2) = B$. Но $B \Leftrightarrow (M_a > M_b)$. Таким образом $(\tilde{a} > \tilde{b}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (M_a > M_b)$. Видим, что в случае 1 эквивалентность (15) выполняется, и теорема верна. Случай 2: интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ накрывают друг друга. Для определенности, пусть $\tilde{a}$ накрывает $\tilde{b}$ (рис. 2). Тогда, согласно (14) и с учетом (12) $(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \Leftrightarrow (|a'| \leq |a''|) = C$. Но $C \Leftrightarrow (M_a \geq M_b)$, так что $(\tilde{a} \geq b) \Leftrightarrow (M_a \geq M_b)$. Аналогично, согласно (14) и с учетом (12) $(\tilde{a} > \tilde{b}) \Leftrightarrow (|a'| < |a''|) = D$. Но $D \Leftrightarrow (M_a > M_b)$, так что $(\tilde{a} > b) \Leftrightarrow \; (M_a > M_b)$. Наконец, согласно (14), (12) $(\tilde{a} = \tilde{b}) \Leftrightarrow (|a'| = |a''|) = E$. Но $E \Leftrightarrow \; (M_a = M_b)$, так что $(\tilde{a} = b) \Leftrightarrow (M_a = M_b)$. Видим, что и в случае 2 эквивалентность (15) выполнена и теорема верна.

Как показывает теорема 4, сравнение произвольных двух интервалов по отношениям $\geq, >, =$ в смысле (14) (т. е. проверка наличия этих отношений между интервалами) сводится к сравнению по этим отношениям центров интервалов. Будем называть интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ сравнимыми по отношению $\square$, если $\tilde{a} \;\square\; \tilde{b}$ или $\tilde{b} \;\square\; \tilde{a}$, и сравнимыми по множеству отношений $\{\square_i\}$, если они сравнимы хотя бы по одному отношению $\square_i$ из этого множества.

Т е о р е м а 5. Два произвольных интервала $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ всегда сравнимы по отношению $\geq$ и по множеству отношений $\{>, =\}$, понимаемым в смысле (14).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. Пусть $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ – два произвольных интервала. Согласно (15), $(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \Leftrightarrow (M_a \geq M_b), (\tilde{b} \geq \tilde{a}) \Leftrightarrow (M_b \geq M_a)$. Но одно из двух указанных неравенств между числами M_a и M_b всегда верно. Поэтому всегда верно $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ или $\tilde{b} \geq \tilde{a}$, что означает сравнимость $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ по отношению $\geq$. Далее, для указанных $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, согласно (15), $(\tilde{a} > \tilde{b}) \Leftrightarrow (M_a > M_b), (\tilde{b} > \tilde{a}) \Leftrightarrow (M_b > M_a), (\tilde{a} = \tilde{b}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (M_a = M_b)$. Но одно из трех указанных соотношений между числами M_a и M_b всегда верно. Поэтому всегда верно $\tilde{a} > \tilde{b}$ или $\tilde{b} > \tilde{a}$, или $\tilde{a} = \tilde{b}$. Первая пара неравенств означает сравнимость $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ по отношению $>$, а равенство – их сравнимость по отношению $=$. Так что все вместе означает сравнимость $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ по множеству отношений $\{>, =\}$.

Как показывает теорема 5, не существует интервалов, не сравнимых по отношению $\geq$ и по множеству отношений $\{>, =\}$, понимаемых в смысле (14). Это открывает путь к решению задач оптимизации с интервальными параметрами, без каких-либо ограничений (ср. с теоремой 1, содержащей такое ограничение в связи с несравнимостью некоторых интервалов по отношению $\geq$, понимаемому в смысле (3)). Заметим еще, что отношение равенства интервалов в смысле (14), согласно теореме 5, является более общим, чем отношение их равенства в смысле теории множеств: первое требует только совпадения центров двух интервалов, а второе – полного совпадения обоих интервалов.

5. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ И ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

С помощью результатов § 4 можно решить вопрос о выделении экстремального (максимального или минимального) из нескольких имеющихся интервалов. Рассмотрим систему произвольных интервалов $\tilde{a}_1 = [a_{11}, a_{12}], \tilde{a}_2 = [a_{21}, \; a_{22}], ..., \tilde{a}_n = [a_{n1}, a_{n2}]$. Назовем интервал $\tilde{a}_1$ нестрого (строго) максимальным среди интервалов $\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n$, если он находится с ними в отношениях $\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_1 \geq a_n$ (в отношениях $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_1 > a_n$) в смысле определений (14). Аналогично, назовем интервал нестрого (строго) минимальным среди интервалов $\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n$, если он находится с ними в отношениях $\tilde{a}_2 \geq \tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n \geq \tilde{a}_1$ (в отношениях $\tilde{a}_2 > \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n > a_1$) в смысле определений (14). Условия для практического выделения максимального или минимального интервала дает следующее предложение.

Т е о р е м а 6. Для того чтобы в системе интервалов $\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n$ интервал $\tilde{a}_1$ был нестрого или строго максимальным, необходимо и достаточно, чтобы в соответствующем множестве центров этих интервалов $M_{a_1}, ..., M_{a_n}$ центр M_{a_1} интервала $\tilde{a}_1$ был нестрого или строго максимальным. Аналогично, для того чтобы в системе интервалов $\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n$ интервал $\tilde{a}_1$ был нестрого или строго минимальным, необходимо и достаточно, чтобы в множестве центров этих интервалов $M_{a_1}, ..., M_{a_n}$ центр M_{a_1} интервала $\tilde{a}_1$ был нестрого или строго минимальным.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6. В соответствии с определением нестрого максимального интервала и с учетом теоремы 4 имеем цепочку эквивалентных событий

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{a}_1 = \max\{\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n\}] \Leftrightarrow [\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_n] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [M_{a_1} \geq M_{a_2}, ..., M_{a_1} \geq M_{a_n}] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [M_{a_1} = \max\{M_{a_1}, ..., M_{a_n}\}]
\end{aligned}
$$

Эквивалентность первого и последнего события в этой цепочке доказывает справедливость условия нестрогой максимальности интервала. Справедливость других содержащихся в теореме 6 условий (строгой максимальности, строгой и нестрогой минимальности интервала) доказываются так же.

Решим теперь вопрос о соответствии алгебраических операций над интервалами и аналогичных операций над центрами этих интервалов.

Т е о р е м а 7. Операция $M(\tilde{a}) = (a_1 + a_2)/2$ вычисления центра M произвольного интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ линейна относительно $\tilde{a}$, т. е.

$$
M(\tilde{a} + \tilde{b}) = M(\tilde{a}) + M(\tilde{b}), \quad M(k\tilde{a}) = kM(\tilde{a}), \tag{16}
$$

k – число.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 7. Согласно результатам интервальной математики [4], суммирование произвольных интервалов $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ и умножение произвольного интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ на вещественное число k выполняется по формулам

$$
\begin{aligned}
&[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \\
&k[a_1, a_2] = \begin{cases} [a_1 k, a_2 k], & k \geq 0, \\ [a_2 k, a_1 k], & k < 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{17}
$$

Отсюда имеем, с учетом (17)

$$
\begin{aligned}
&M(\tilde{a} + \tilde{b}) = M([a_1, a_2] + [b_1, b_2]) = M(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \\
&= (a_1 + b_1 + a_2 + b_2)/2 = (a_1 + a_2)/2 + (b_1 + b_2)/2 = \\
&= M(\tilde{a}) + M(\tilde{b}),
\end{aligned}
$$

что доказывает первую формулу (16). Далее, имеем при $k \geq 0$, с учетом (17)

$$
\begin{aligned}
&M(k\tilde{a}) = M(k[a_1, a_2]\} = M[a_1 k, a_2 k] = \\
&= (a_1 k + a_2 k)/2 = k(a_1 + a_2)/2 = kM(\tilde{a}),
\end{aligned}
$$

что доказывает вторую формулу (16) при $k \geq 0$. Доказательство в случае $k < 0$ не отличается от данного.

Изложенное позволяет предложить некоторый общий подход к решению задач оптимизации систем с интервальными параметрами. Этот подход основан на переходе от имеющейся недетерминированной, интервальной задачи оптимизации к соответствующей детерминированной (обычной) задаче оптимизации. Переход осуществляется в соответствии с теоремой 6, позволяющей заменять задачу отыскания максимального (минимального) из нескольких интервалов эквивалентной задачей отыскания максимального (минимального) из центров этих интервалов и теоремой 4, позволяющей заменять неравенства (равенства) между интервалами такими же неравенствами (равенствами) между центрами этих интервалов. Практически заменяются оператор определения максимума (минимума) интервального значения целевой функции на оператор определения центра этого максимума и операторы определения интервальных значений функций в ограничениях на операторы определения центров этих значений. После этих замен остается лишь раскрыть значения всех операторов определения центров интервалов, используя формулы типа (16). В результате исходная задача интервальной оптимизации переходит в эквивалентную ей обычную задачу оптимизации, которая может быть решена известными методами.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод сравнения интервальных чисел и выбора максимального (минимального) из них позволяет сравнивать любые интервальные числа, находящиеся в произвольных отношениях между собой. Это открывает возможность более общего, чем прежде [1–3] подхода к оптимизации систем с интервально заданными параметрами, отличающегося тем, что в нем решение интервальной оптимизационной задачи существует всегда (точнее, во всех случаях, когда существует решение соответствующей детерминированной задачи). Такой более общий подход применим ко всем задачам оптимизации в условиях неопределенности, к которым раньше применялись самые различные подходы [1–3, 10–15]. Обзор решений этих задач с позиции подхода [1–3] приведен в [15]. Надо заметить, что предложенный в данной статье метод сравнения интервальных чисел и соответствующий подход к оптимизации систем с интервальными параметрами имеют определенные ограничения, вытекающие из менее полного, чем в [1–3], учета неопределенности значений указанных параметров. Например, если интервалы, определяющие области значений параметров системы, расширяются симметрично относительно их центра, то такое очевидное увеличение неопределенности системы, учитываемое в подходе [1–3], не учитывается в подходе настоящей статьи. Последнее, видимо, надо рассматривать как неизбежную плату за достигнутое продвижение в теории и практике интервальной оптимизации – возможность сравнения любых интервальных чисел и решения оптимизационных задач с любыми интервальными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левин В.И.* Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 97-107.
2. *Левин В.И.* Булево линейное программирование с интервальными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 1994. № 7.
3. *Левин В.И.* Интервальное дискретное программирование // Кибернетика и системный анализ. 1994. № 6. С. 91-103.
4. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
5. *Левин В.И.* Оптимизация расписаний в системах с неопределенными временами обработки. I, II // Автоматика и телемеханика. 1995. № 2, 3. С. 99-110, 106-116.
6. *Левин В.И.* Интервальный подход к оптимизации в условиях неопределенности // Информационные технологии. 1999. № 1. С. 7-12.
7. *Левин В.И.* Нелинейная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 2. С. 138-147.
8. *Левин В.И.* Антагонистические игры с интервальными параметрами // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 3. С. 149-160.
9. *Левин В.И.* Математическая теория сравнения интервальных величин // Измерительная техника. 1998. № 5. С. 3-8.
10. *Libura M.* Integer programming problems with inexact objective function // Control and Cybernetics. 1980. V. 9. № 4. P. 189-202.
11. *Тимохин С.Г., Шапкин А.В.* О задачах линейного программирования в условиях неточных данных // Экономика и математические методы. 1981. Т. 17. № 5. С. 955-963.
12. *Steuer R.E.* Algorithms for linear programming problems with interval objective function coefficients // Mathematics of Operations Research. 1981. V. 6. P. 222-248.
13. *Ватолин А.А.* О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24. № 11. С. 1629-1637.
14. *Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.* Оптимизация в условиях неопределенности. М.: Изд-во МЭИ; София: Техника, 1989.
15. *Левин В.И.* Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности. Пенза: Изд-во Пенз. технол. ин-та, 1999.

Поступила в редакцию 19 февраля 2002 г.