УДК 517.977

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ, ДОСТАВЛЯЮЩЕГО МИНИМУМ ФУНКЦИОНАЛУ

© А. В. Щербакова

Shcherbakova A.V. On conditions for the existence of a solution to the two-point boundary problem of the controlled linear system that brings minimum to the functional. Provided the fundamental matrix is know for solving a linear homogeneous system, a methodology is proposed for finding a solution to the two-point boundary problem where a certain nonlinear functional takes the least value.

Рассмотрим систему дифференцальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{1}$$

в которой x – n-мерный вектор, u – управление, $A(t)$, $B(t)$ – соответственно $n \times n$, $n \times 1$ – непрерывные на сегменте $[a, b]$ матрицы, $a < b$ – конечные числа.

Пусть D – некоторое замкнутое ограниченное множество n-мерного векторного пространства E_n, не содержащее нулевой вектор,

$$U = \{u \in E_1 : |u| \leqslant d\},$$

$d > 0$ – некоторое число. Символом $x(t, \gamma, u)$ обозначим решение системы (1), соответствующее управлению $u \in U$, удовлетворяющее начальным условиям $x(a, \gamma, u) = \gamma$.

Определение. Систему (1) назовем управляемой из множества D, если существует непустое множество $D_1 \subseteq D$ такое, что для любой точки $\gamma \in D_1$ существует управление $u \in U$, удовлетворяющее равенству $x(b, \gamma, u) = 0$.

Ставится задача – найти управление $u \in U$ и точку $\gamma \in D$, при которых решение $x(t, \gamma, u)$ системы (1) доставляет минимум функционалу $I = \int\limits_a^b F(t, x, u)dt$, заданному на множестве

$$\{x(t, \gamma, u) : \gamma \in D,\ u \in U,\ x(1, \gamma, u) = 0\},$$

$F(t, x, u)$ – известная непрерывная на множестве $[a, b] \times D \times U$ функция.

Основополагающие исследования аналогичных задач в более общем случае содержатся в работах [1–3].

Пусть $\gamma \in D$, $u \in U$. Решение $x(t, \gamma, u)$ системы (1) запишем в виде

$$x(t, \gamma, u) = X(t)\gamma + X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(\xi)B(\xi)u\,d\xi,$$

$X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(a) = E$, E – единичная матрица. Следовательно, число $u \in U$, удовлетворяющее равенству $x(b, \gamma, u) = 0$, является решением системы уравнений

$$\gamma = -\int\limits_a^b X^{-1}(t)B(t)u\,dt. \tag{2}$$

Положим $\lambda = -\int\limits_a^b X^{-1}(t)B(t)\,dt$. Тогда

$$\gamma = \lambda u, \tag{3}$$

решение $x(t, \gamma, u)$ системы (1), удовлетворяющее условию $x(b, \gamma, u) = 0$, определяется равенством

$$x(t, \lambda u, u) = R(t)u, \tag{4}$$

где $R(t) = X(t)\lambda + X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(\xi)B(\xi)d\xi$.

При $u \in (-\infty, \infty)$ равенство (3) определяет прямую l, проходящую через точки 0 и λ в пространстве E_n.

Если прямая l не имеет общих точек с множеством D, то согласно определению система (1) не управляемая из множества D.

Пусть сегмент $[-d, d]$ можно разбить на части точками $-d = u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_m = d$ таким образом, чтобы $\gamma_i = \lambda u_i \in \partial D$, ∂D – граница множества D, и пусть $[\gamma_i, \gamma_{i+1}]$ – множество точек прямой l, определяемое равенством $[\gamma_i, \gamma_{i+1}] = \{\gamma \in E_n : \gamma = \lambda u, u \in [u_i, u_{i+1}]\}$, $i \in \{1, 2 \ldots, m\}\}$. Обозначим буквой Q множество всех таких натуральных чисел, что при любом $i \in Q$ $[\gamma_i, \gamma_{i+1}] \subset D$. Следовательно, система (1) управляема из множества D, если Q – непустое множество, при этом $D_1 = \bigcup\limits_{i\in Q} [\gamma_i, \gamma_{i+1}]$, система уравнений $x(b,\gamma,u) = 0$ во множестве U имеет решение при $\gamma \in D_1$ и не имеет решений при $\gamma \notin D_1$.

Пусть U^* – множество всех чисел $u \in U$, удовлетворяющих включению $\lambda u \in D_1$. Из определения множества U^* следует, что U^* – замкнутое ограниченное множество. Тогда решение $x(t,\gamma,u)$ системы (1), для которого $x(b,\gamma,u) = 0$, определяется равенством (4) при $u \in U^*$. Функционал I, заданный на множестве решений $x(t,\lambda u,u)$, $u \in U^*$, системы (1), является функцией, определенной на множестве U^*. Следовательно, для решения поставленной задачи следует использовать методы нахождения наименьшего значения функции одной переменной, заданной на замкнутом ограниченном множестве.

Пример. Рассмотрим систему уравнений (1), в которой $A(t) = [\mathrm{colon}(1,0), \mathrm{colon}(0,1)]$, $B(t) = \mathrm{colon}(-t, -e^{-t})$, $t \in [0,1]$. Пусть множество D ограничено прямыми $\beta = 3\alpha$, $\beta = 5\alpha$, $\alpha + \beta = 1$, $2\alpha + 2\beta = 1$. Множество U определено равенством $U = \{u \in E_1 : |u| \leqslant 1\}$. Найдем управление $u \in U$ и точку $\gamma = (\alpha,\beta) \in D$, при которых решение $x(t,\gamma,u)$, удовлетворяющее равенствам $x(0,\gamma,u) = \gamma$, $x(1,\gamma,u) = 0$, доставляет минимум функционалу $I = \int\limits_0^1 (u^3 - 3e^{-2}x_2^2)\,dt$, заданному на множестве

$$\{x(t,\gamma,u) : \gamma \in D,\ u \in U,\\ x(0,\gamma,u) = \gamma,\ x(1,\gamma,u) = 0\}.$$

Решение $x(t,\gamma,u)$, $x(0,\gamma,u) = \gamma$ системы запишется так:

$$x(t,\gamma,u) = \mathrm{colon}\left(\alpha e^t, \beta e^t\right) + \\ + u\mathrm{colon}\left(t + 1 - e^t, -te^t\right)$$

Следовательно, равенство $x(1,\gamma,u) = 0$ принимает вид

$$\mathrm{colon}(\alpha e,\ \beta e) + u\mathrm{colon}(2 - e, -e) = 0.$$

Отсюда $\alpha = \frac{e-2}{e}u$, $\beta = u$, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{e}{e-2}$.

Непосредственным вычислением устанавливаем, что $3 < \frac{e}{e-2} < 5$, абсциссы точек пересечения прямой $\beta = \frac{e}{e-2}\alpha$ с прямыми $2\alpha + 2\beta = 1$, $\alpha + \beta = 1$ определяются соответственно равенствами $\alpha = \frac{1}{4}\left(\frac{e-2}{e-1}\right)$, $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{e-2}{e-1}\right)$. А это значит, что при любом $\alpha \in \left[\frac{1}{4}\left(\frac{e-2}{e-1}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{e-2}{e-1}\right)\right]$ отрезок прямой $\beta = \frac{e}{e-2}\alpha$ принадлежит множеству D и только для γ из этого отрезка существует u, удовлетворяющее равенству $x(1,\gamma,u) = 0$. А так как $\alpha = \frac{e-2}{e}u$, то $\frac{1}{4}\left(\frac{e-2}{e-1}\right) \leqslant \frac{e-2}{e}u \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{e-2}{e-1}\right)$. Отсюда $\frac{1}{4}\frac{e}{e-1} \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}\frac{e}{e-1}$. Очевидно, что сегмент $\Delta = \left[\frac{1}{4}\frac{e}{e-1}, \frac{1}{2}\frac{e}{e-1}\right] \subset U$.

Решение системы, определенное начальным условием $\gamma = (\alpha,\beta)$, $\alpha = \frac{e-2}{e}u$, $\beta = u$, запишется так:

$$x(t,\gamma,u) = \mathrm{colon}\left(\frac{e-2}{e}e^t, e^t\right)u + \\ + \mathrm{colon}\left(t + 1 - e^t, -te^t\right)u.$$

Функционал I на этом решении определяется равенством $I = u^3 - \frac{3}{4}u^2$. На сегменте Δ единственной точкой экстремума функционала I является $u = \frac{1}{2}$. Непосредственным вычислением убеждаемся, что наименьшее значение на сегменте Δ функционал I принимает при $u = \frac{1}{2}$. Следовательно, наименьшее значение функционалу I доставляет решение $x(t,\gamma,u)$ при $\alpha = \frac{e-2}{2e}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $u = \frac{1}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Н., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.

2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

3. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 9 июня 2004 г.