1

1

УДК 517.925.52

ОБОБЩЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© С. М. Дзюба, Ю. Е. Репина

Ключевые слова: Классическое дифференциальное включение, обобщенно-периодическое решение.

Вводится определение обобщенно-периодического решения, классического автономного и неавтономного включения. Доказаны теоремы существования обобщенно–периодических решений в автономном и неавтономном случаях.

1. Введение. Одно из важнейших мест в теории динамических систем занимает проблема изучения поведения траекторий на инвариантных и минимальных множествах. Наиболее характерными результатами здесь являются теоремы Биркгофа о рекуррентных траекториях и минимальных множествах, теоремы возвращения Пуанкаре–Каратеодори и Хинчина, а также целый ряд эргодических теорем. В книге [1] несколько уточнены свойства рекуррентных траекторий и минимальных множеств динамических систем типа Биркгофа. Именно показано, что каждое компактное минимальное множество содержит рекуррентные траектории, описываемые обобщенно-периодическими решениями и только ими. Приведенное в [1] доказательство существования обобщенно-периодических решений позволяет с единых позиций рассматривать соответствующие решения динамических и непрерывных периодических систем.

Переходя к одному из обобщений этих результатов, в некоторой области Σ пространства $\mathbb{R}^n$ рассмотрим автономное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \tag{1}$$

где для всех значений $x \in \Sigma$ множество $F(x)$ непусто, ограничено, замкнуто и выпукло, а функция F еще и β-непрерывна. Выполнение этих условий обеспечивает существование (но не единственность) локальных решений включения (1). Если при этом каждое решение может быть продолжено на всю ось $\mathbb{R}$, то решения определяют на Σ обобщенную динамическую систему.

В работах [2, 3] показано, что из существования ограниченного решения следует существование обобщенно-периодического решения. Одной из основных особенностей обобщенно-периодических решений оказалось то, что обобщенно-периодическое решение определяет ситуацию типического поведения для многомерных нелинейных систем: если (1) не имеет ни одного обобщенно-периодического решения, то эта система не имеет также ни одного ограниченного при $t \in \mathbb{R}$ решения. Целью настоящей работы является уточнение этих результатов.

2. Неавтономные дифференциальные включения. Рассмотрим неавтономное дифференциальное включение на прямом произведении $\mathbb{R} \times \Sigma$ действительной оси $\mathbb{R}$ и множества Σ

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{2}$$

где для всех $(t,x) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ множество $F(t,x)$ непусто, ограничено, замкнуто и выпукло, а функция F еще и β-непрерывна. Также будем считать, что функция F периодична по t с периодом T.

Пусть $\varphi(t)$ — некоторое решение включения (2), определенное и ограниченное для всех значений $t \in \mathbb{R}$. Предположим, что для каждого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(t+NT)| < \varepsilon.$$

Тогда будем говорить, что $\varphi(t)$ — обобщенно-периодическое решение.

Примерами обобщенно–периодического решения могут служить любое периодическое решение, иррациональная обмотка тора и любое почти периодическое решение [1].

Существование обобщенно–периодических решений устанавливает следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\xi(t)$ *— некоторое решение включения (2), определенное на всей оси* $\mathbb{R}$ *и ограниченное при* $t \geq 0$. *Тогда найдется такая последовательность натуральных чисел*

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} n_k = \infty, \tag{3}$$

и соответствующее ей обобщенно–периодическое решение $\varphi(t)$, *что*

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t + n_k T) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *и*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi\Big(t + (n_{k+1} - n_k)T\Big) = \varphi(t)$$

равномерно на всей оси $\mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и $N = 1, 2, \ldots,$ положим

$$\xi_N(t) = \xi_1\Big(t + (N-1)T\Big). \tag{4}$$

Тогда в силу периодичности функции F несложно заметить, что каждая из функций $\xi_N(t)$ является решением включения (2), определенным на всей оси $\mathbb{R}$ и ограниченным при $t \geq 0$.

Пусть теперь (3) — произвольная последовательность натуральных чисел. В соответствии с (3) выберем из множества (4) последовательность

$$\xi_{N_1}, \xi_{N_2}, \ldots, \xi_{N_k}, \ldots \tag{5}$$

Так как решение $\xi(t)$ ограничено при $t \geq 0$, последовательность (5) равностепенно непрерывна и равномерно ограничена на произвольном отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Поэтому для всех значений $t \in \mathbb{R}$ можем записать равенство

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{N_k}(t) = \varphi(t),$$

в котором сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a,b] \subset \mathbb{R}$. При этом функция $\varphi(t)$ является решением включения (2), при всех значениях $t \in \mathbb{R}$ содержащимся в некоторой компактной части E множества Σ.

Пусть

$$\Delta(N_1), \Delta(N_2), \ldots, \Delta(N_k), \ldots$$

— множество, элементы которого при всех значениях N_k зададим равенством

$$\Delta(N_k) = N_{k+1} - N_k.$$

При этом будем считать, что
$$\lim_{k\to\infty}\Delta(N_k)=\infty.$$
Последнего всегда можно добиться, удалив из множества (5) соответствующие элементы при сохранении его счетности.

Пусть
$$P=\{\varphi_0,\varphi(T),\ldots,\varphi(iT),\ldots\}.$$
Тогда, как легко видеть,
$$\bar{P}=\bigcap_{k\geq 1}\overline{\bigcup_{m\geq k}\xi_{m+N_m}(0)},$$
где $\bar{P}$ — замыкание множества P . Более того, множество
$$P_1=\bigcap_{k\geq 1}\overline{\bigcup_{m\geq k}\varphi\Big(\Delta(N_m)T\Big)}$$
непусто и компактно, $P_1\subseteq\bar{P}$.

Предположим, что
$$\varphi_0\neq\lim_{k\to\infty}\varphi\Big(\Delta(N_k)T\Big).$$
Тогда найдется такая последовательность натуральных чисел
$$l_1,l_2,\ldots,l_k,\ldots,\quad \lim_{k\to\infty}l_k=\infty,$$
что
$$P_1=\bigcap_{k\geq 1}\overline{\bigcup_{m\geq k}\xi_{m+l_m}(0)},$$
а множество
$$P_2=\bigcap_{k\geq 1}\overline{\bigcup_{m\geq k}\varphi\Big((l_{m+1}-l_m)T\Big)},$$
является непустой компактной частью множества P_1 . Продолжая данный процесс неограниченно, получим вполне упорядоченную систему
$$P_1\supseteq P_2\supseteq\ldots\supseteq P_j\supseteq\ldots$$
компактных множеств. Тогда согласно теореме Бэра найдется трансфинитное число не выше II класса ν , для которого множества P_ν и $P_{\nu+1}$ совпадают.

Для простоты обозначений будем считать, что само множество $\bar{P}$ совпадает с P_ν . Тогда
$$\varphi_0=\lim_{k\to\infty}\varphi\Big(\Delta(N_k)T\Big).$$
Следовательно, для всех значений $t\in\mathbb{R}$ имеет место равенство
$$\varphi(t)=\lim_{k\to\infty}\varphi\Big(t+\Delta(N_k)T\Big),\tag{6}$$
в котором по построению сходимость равномерна на каждом из отрезков $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

Обозначим через M множество функций
$$\varphi(t),\varphi(t\pm T),\ldots,\varphi(t\pm NT),\ldots,$$
определенных на отрезке $[0,T]$. В силу компактности множества E замыкание $\bar{M}$ множества M — компактное в топологии равномерной сходимости на $[0,T]$ множество, еще и

равностепенно непрерывное на этом отрезке. Пусть φ^* — продолжение произвольной функции множества M на ось $\mathbb{R}$. Тогда для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное k_0, что при $k > k_0$ выполнено неравенство

$$\max_{t\in[-T,T]}\left|\varphi^*(t)-\varphi^*\Big(t+\Delta(N_k)T\Big)\right| < \varepsilon,$$

где в силу равностепенной непрерывности множества $\bar{M}$ число k_0 не зависит от выбора функции φ^*. Поэтому неравенство

$$\max_{t\in[-NT,NT]}\left|\varphi(t)-\varphi\Big(t+\Delta(N_k)T\Big)\right| < \varepsilon$$

выполняется равномерно относительно N.

Таким образом, сходимость в (6) равномерна всей оси $\mathbb{R}$. Следовательно, $\varphi(t)$ — обобщенно–периодическое движение.

3. Автономные дифференциальные включения. Рассмотрим автономное дифференциальное включение в некоторой области Σ пространства $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} \in F(x), \tag{7}$$

где для всех значений $x \in \Sigma$ множество $F(x)$ непусто, ограничено, замкнуто и выпукло, а функция F еще и β-непрерывна.

Пусть $\varphi(t)$ — некоторое решение включения (7), определенное для всех значений $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при этих значениях t. Будем говорить, что $\varphi(t)$ — обобщенно-периодическое решение, если для каждой пары ε, T положительных чисел можно указать такое натуральное число N, что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\left|\varphi(t)-\varphi(t+NT)\right| < \varepsilon.$$

Важнейшее свойство включений (7) устанавливает следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\xi(t)$ *— некоторое решение включения* (7), *определенное на всей оси* $\mathbb{R}$ *и ограниченное при* $t \geq 0$. *Тогда для каждого положительного числа* T *найдется такая последовательность натуральных чисел*

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} n_k = \infty,$$

и соответствующее ей обобщенно–периодическое решение $\varphi(t)$, *что*

$$\lim_{k\to\infty} \xi(t+n_kT) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *и*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi\Big(t+(n_{k+1}-n_k)T\Big) = \varphi(t)$$

равномерно на всей оси $\mathbb{R}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 и потому здесь опускается.

ЛИТЕРАТУРА

1 . *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах. М.: ЛКИ, 2007.

2 . *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* О рекуррентных траекториях автономных дифференциальных включений // Дифф. уравнения. 2007. Т. 43. № 11. С. 1–5.

3 . *Афанасьев А.П., Дзюба С.М., Репина Ю.Е.* Об обобщенно–периодических решениях неавтономных дифференциальных включений // Дифф. уравнения. 2009. Т.45. № 1. С. 3–7.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 10-07-00136, № 11-07-00098).

Поступила в редакцию 11 мая 2011 г.

Dzyuba S.M., Repina Y.E. Generalized-periodic solutions of classical differential inclusions. The definition of generalized-periodic solution of classical autonomous and nonautonomous inclusion is introduced. The existence theorems of generalized-periodic solutions in autonomous and nonautonomous cases are proved.

Key words: classical differential inclusion, generalized-periodic solution.

Дзюба Сергей Михайлович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика», e-mail: sdzyuba@mail.tambov.ru

Репина Юлия Евгеньевна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, инженер кафедры «Прикладная математика и информатика», e-mail: yerepina@gmail.com