Key words: covering mapping; metric spaces product; Lipschitz condition.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, доктор физико-математических наук, профессор, директор института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

Плужникова Елена Александровна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

УДК 512.643

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

© А. Н. Пчелинцев, Д. Н. Протасов

Ключевые слова: энергосберегающее управление, матричная экспонента, степенные ряды, обусловленность матриц, метод обратной матрицы.

В работе описывается методика численных вычислений для определения параметров функции управления при решении задачи энергосберегающего управления.

Серьезными проблемами при решении задач энергосберегающего управления многомерными объектами являются определение всех возможных видов функций оптимального управления, соотношений для расчета их параметров d_i и проверки выполнения условий существования решения задачи управления для конкретных числовых исходных данных.

Как рассмотрено в работе [1], определение вектора D параметров d_i ($i = \overline{1,n}$, n – количество параметров) функции оптимального управления объектом, характеризуемым заданными постоянными матрицами $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ и $B = \mathrm{diag}(b_1,\ldots,b_n)$, в некоторых случаях сводится к решению системы линейных уравнений вида

$$\begin{array}{c} d_1\sum_{i=1}^n b_i\varphi_{1,i,1} + d_2\sum_{i=1}^n b_i\varphi_{1,i,2} + \ldots + d_n\sum_{i=1}^n b_i\varphi_{1,i,n} = l_1, \\ \vdots \\ d_1\sum_{i=1}^n b_i\varphi_{n,i,1} + d_2\sum_{i=1}^n b_i\varphi_{n,i,2} + \ldots + d_n\sum_{i=1}^n b_i\varphi_{n,i,n} = l_n, \end{array} \tag{1}$$

где

$$\varphi_{j,i,k} = \int_0^2 f_{j,i}(A(2-\tau))f_{i,k}(-A^T\tau)d\tau,$$

$e^M = (f_{i,j}(M))_{n\times n}$ — матричная экспонента (M — матрица-аргумент), $L = \mathrm{colon}(l_1,\ldots,l_n)$ — вектор синтезирующих переменных, компоненты которого определяются по формуле

$$l_i = z_{ei} - \sum_{j=1}^n f_{i,j}(2A)z_{0j},$$

$Z_0 = \mathrm{colon}(z_{01},\ldots,z_{0n})$ — задаваемый вектор начального состояния объекта,
$Z_e = \mathrm{colon}(z_{e1},\ldots,z_{en})$ — задаваемый вектор конечного состояния объекта.

Разработан алгоритм численных вычислений для определения параметров d_i. Заметим, что процесс управления может соизмеряться со временем вычислений. Поэтому нужно определять параметры функции управления за приемлемое время. Тогда, следуя системе (1), алгоритм состоит из следующих шагов: оптимальный способ вычисления матричной экспоненты, определяющей коэффициенты системы (1), снятие знака интеграла в коэффициентах $\varphi_{j,i,k}$ и решение системы (1) с учетом обусловленности матрицы ее коэффициентов.

Обозначим через

$$p_k = \frac{s_k - p_1 s_{k-1} - \ldots - p_{k-1} s_1}{k},$$

где $s_k = \mathrm{Sp}\, A^k$ — след матрицы A^k (сумма элементов, стоящих на главной диагонали), $p_1 = \mathrm{Sp}\, A$, $k = \overline{1,n}$. Если $m = 0$, то $q_{0,k} = p_k$. Иначе (при $m \in N$, N — множество натуральных чисел) —

$$q_{m,k} = p_k q_{m-1,1} + q_{m-1,k+1},;\ q_{m-1,n+1} = 0.$$

Из теоремы Гамильтона-Кэли получена формула вычисления матричной экспоненты:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k \left[\frac{t^k}{k!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_{m,n-k}}{(m+n)!} t^{m+n} \right] \equiv \sum_{k=0}^{n-1} A^k \left[\frac{t^k}{k!} + \sum_{m=0}^{\infty} r_{m,k} t^{m+n} \right].$$

Систему (1) можно переписать в следующем виде:

$$\Big[e^{2A} \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \sum_{i=0}^{n-1} \left(A^T\right)^i \int_{-2}^{0} \left(\frac{\omega^k}{k!} + \sum_{m=0}^{\infty} r_{m,k} \omega^{m+n} \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\omega^i}{i!} + \textstyle\sum_{m=0}^{\infty} r^*_{m,i} \omega^{m+n} \right) d\omega \Big] D = L,$$

где коэффициенты $r^*_{m,i}$ соответствуют матрице A^T. Используя форму Коши для произведения степенных рядов, можно избавиться от стоящего в скобках интеграла.

При численном решении системы (1) линейных уравнений матрица H коэффициентов системы может быть плохо обусловлена (малые изменения в элементах матрицы будут соответствовать значительным изменениям ее обратной матрицы). В таком случае, чтобы достигнуть заданной точности расчета параметров управления, необходимо после отыскания решения системы увеличить точность вычисления матрицы H и заново произвести расчеты. После этого сравнить, насколько отличается вновь полученное решение системы (1) от решения до увеличения точности. При этом может возникнуть необходимость в использовании библиотек высокоточных вычислений, особенностью которых является практически неограниченная разрядность вещественных чисел (например, библиотека GMP [2]).

Таким образом, предлагаемый алгоритм проведения вычислений позволяет значительно сократить время определения параметров функции управления и повысить точность получения результата за счет использования высокоточных вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пчелинцев А.Н., Погонин В.А.* Определение параметров функции управления при решении задачи энергосберегающего управления в распределенной компьютерной среде // Системы управления и информационные технологии. Научно-технический журнал. Москва-Воронеж: Научная книга, 2010. №1(39). С. 46-49.

2. GNU Multiple Precision Arithmetic Library. http://gmplib.org/

Поступила в редакцию 10 ноября 2010 г.

Pchelintsev A.N., Protasov D.N. An algorithm of finding control function parameters in the problem of energy conservative control. In the work there is described a method of numeric computations of control function parameters in the problem of energy conservative control.

Keywords: energy conservative control, matrix exponential, power series, conditioned matrix, inverse matrix method.

Пчелинцев Александр Николаевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры распределенных вычислительных систем, e-mail: pchela9091@rambler.ru

Протасов Дмитрий Николаевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, кандидат экономических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики, e-mail: protasov.dn@yandex.ru

УДК 517.958

О СВЯЗИ КЛАССИЧЕСКОГО И ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ СИНГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПО ЧАСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© А.Ю. Сазонов, Ю.Г. Фомичева

Ключевые слова: сингулярный В-эллиптический оператор, фундаментальное решение, обобщенное решение.

В работе найдены достаточные условия, при которых классическое решение задачи Дирихле для одного класса сингулярных В-эллиптических операторов в заданной ограниченной области почти всюду совпадает с обобщенным решением этой задачи.

Пусть $\mathbb{R}^{n+m}$ действительное евклидово пространство точек $x = (x', y')$, где $x' = (x_1, \ldots, x_n)$, $y' = (y_1, \ldots, y_m)$,

$$\mathbb{R}^{n+m}_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+m} : y_i > 0, i = 1, 2, \ldots m\right\},$$

Ω^+ — произвольная ограниченная область в R^{n+m}_+, прилегающая к гиперплоскостям $y_1 = 0, \ldots, y_m = 0$.

Через $\Gamma^0_1, \ldots, \Gamma^0_m$ обозначим часть границы области Ω^+, лежащей на гиперплоскостях $y_1 = 0, \ldots, y_m = 0$, а через $\overline{\Gamma^+}$ — замыкание оставшейся части границы. Предполагаем, что $\overline{\Gamma^+}$ произвольная поверхность типа Ляпунова.

В работе рассматривается краевая задача вида:

$$P_{y'} v = -f, \quad x \in \Omega^+, \tag{1}$$

$$v \in \overset{\circ}{H}{}^1_{k,+}(\Omega^+), \tag{2}$$

где $P_{y'}$ — дифференциальный оператор, определенный в области Ω^+, содержащий по m пространственным переменным y_i, $(i = 1, 2, \ldots m)$ оператор Бесселя B_{y_i} :

$$P_{y'} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x') B_{y_i} + c(x), \quad c(x) \leqslant 0, \tag{3}$$