УДК 517.968

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

© С.В. Солодуша

Ключевые слова: уравнения Вольтерра I рода; нелинейные интегральные неравенства; система автоматического регулирования.

Рассмотрен вопрос существования решений полиномиальных уравнений Вольтерра I рода, связанных с задачей автоматического регулирования замкнутой нелинейной динамической системы типа черного ящика с векторным входом.

Для математического описания систем автоматического управления с обратной связью все большее применение находят методы, связанные с приложением интегральных уравнений Вольтерра [1]. Как известно, один из универсальных подходов к моделированию нелинейных динамических объектов типа вход-выход основан на построении полиномов Вольтерра N-й степени. Рассмотрим наиболее интересный для приложений случай $N=2$. Пусть $x(t)=\big(x_1(t),x_2(t),...,x_p(t)\big)$. Выберем $x_1(t)=u(t-h)$ в качестве управляющего воздействия, $u(\xi)=0$, $\xi\in[-h,0]$, h — известное постоянное запаздывание. Объект с запаздыванием по управлению описывается квадратичным полиномом Вольтерра

$$\sum_{i=1}^{p} V_{1,i}x_i + \sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{i-1} V_{2,ji}(x_j,x_i) + \sum_{i=1}^{p} V_{2,i}x_i^2 = y(t),\ t\in[0,T], \tag{1}$$

$$V_{1,i}x_i \equiv \int_0^t K_i(t,s)x_i(s)ds,\ \ V_{2,i}x_i^2 \equiv \int_0^t\int_0^t K_{ii}(t,s_1,s_2)x_i(s_1)x_i(s_2)ds_1ds_2,$$

$$V_{2,ji}(x_j,x_i) \equiv \int_0^t\int_0^t K_{ji}(t,s_1,s_2)x_j(s_1)x_i(s_2)ds_1ds_2,\ \ i\neq j;\ \ i,j=\overline{1,p}.$$

В (1) $y(t)$ — скалярная функция времени, причем $y(0)=0$, $y(t)\in C^{(1)}_{[0,T]}$, ядра K_{ii}, $i==\overline{1,p}$, симметричны по переменным s_1, s_2. Предположим, что задача идентификации ядер Вольтерра в (1) решена. Помимо нужной гладкости исходных данных в (1) будем предполагать, что $K_1(t,t)\neq 0$ $\forall t\in[0,T]$.

Ставится задача регулирования, которая состоит в поиске управляющего воздействия $u(t)$, поддерживающего выходной сигнал $y(t)$ на заданном уровне y^*. В рассматриваемом случае управляющее воздействие $u(t)$ является решением уравнения

$$V_{1,1}u+\sum_{i=2}^{p}V_{1,i}x_i+\sum_{i=2}^{p}V_{2,1i}(u,x_i)+\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=2}^{i-1}V_{2,ji}(x_j,x_i)+\sum_{i=2}^{p}V_{2,i}x_i^2+V_{2,1}u^2=f(t),\ t\in[0,T], \tag{2}$$

где $f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-h)$. Сигнал $\varepsilon(t)=y^*-y(t)$, $\varepsilon(\xi)=0$, $\xi\in[-h,0]$, считаем рассогласованием или ошибкой управления. В этом случае (2) является полиномиальным уравнением Вольтерра I рода, непрерывное решение которого существует, вообще говоря, при некотором малом $T>0$.

Покажем специфику (2) для случая постоянных ядер: $K_i = k_i$, $k_1 > 0$, $K_{ji} = k_{ji}$, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant p$. Всюду далее считаем все функции и функциональные пространства вещественными. Не уменьшая общности, зададим $k_1 = 1$ так, что (2) принимает вид

$$\left(1 + \sum_{i=2}^{p} k_{1i} \int_0^t x_i(s)ds\right) \int_0^t u(s)ds + k_{11} \left(\int_0^t u(s)ds\right)^2 = \tilde{f}(t), \tag{3}$$

$$\tilde{f}(t) = f(t) - \sum_{i=2}^{p} k_i \int_0^t x_i(s)ds - \sum_{i=2}^{p} \sum_{j=2}^{i} k_{ji} \Big(\int_0^t x_i(s)ds \Big) \Big(\int_0^t x_j(s)ds \Big), \quad t \in [0, T]. \tag{4}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\tilde{f}(t) \in C^{(1)}_{[0,T]}$, $\tilde{f}(0) = 0$. *Тогда единственное непрерывное решение* (3), (4) *определяется формулой*

$$u^*(t) = \frac{\tilde{f}'(t)}{\alpha(t)} + \frac{\beta'(t)}{2k_{11}} \Big(\frac{1 + \beta(t)}{\alpha(t)} - 1 \Big),$$

где

$$\beta(t) = \sum_{i=2}^{p} k_{1i} \int\limits_0^t x_i(s)ds, \quad \alpha(t) = \sqrt{\big(1 + \beta(t)\big)^2 + 4k_{11}\tilde{f}(t)}.$$

Для установления области существования непрерывного решения применена техника получения неулучшаемых оценок решений нелинейных интегральных неравенств, разработанная в [2]. Также показано, что, несмотря на условие $\tilde{f}(0) = 0$, полиномиальные уравнения Вольтерра вида (3), (4) имеют решение в классе обобщенных функций.

Т е о р е м а 2. *Если* $u^*(t)$ *— решение уравнения* (3), (4), *то*

$$u^{**}(t) = -\Big(u^*(t) + \frac{1}{k_{11}} \big(\delta(t) + \sum_{i=2}^{p} k_{1i} x_i(t) \big) \Big)$$

также решение (3), (4). *Здесь* $\delta(t)$ *—* δ*-функция Дирака.*

Алгоритм численного решения уравнения вида (2) для стационарного случая изложен в [3]. Дальнейшее развитие работы связано с исследованием процессов теплообмена. В качестве эталонной динамической системы рассмотрена математическая модель переходного процесса в элементе теплообменного аппарата, введенная в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belbas S.A., Bulka Yu.* Numerical solution of multiple nonlinear Volterra integral equations // Applied Mathematics and Computation. 2011. V. 217. P. 4791-4804.

2. *Апарцин А.С.* Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода: элементы теории и численные методы // Известия ИГУ. Серия: Математика. Иркутск, 2007. Т. 1. № 1. С. 13-42.

3. *Солодуша С.В.* Приложение нелинейных уравнений Вольтерра I рода к задаче управления динамикой теплообмена // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 133-140.

4. *Апарцин А.С., Таиров Э.А., Солодуша С.В., Худяков Д.В.* Применение интегро-степенных рядов Вольтерра к моделированию динамики теплообменников // Изв. РАН: Энергетика. 1994. № 3. С. 138-145.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 09–01–00377.

Solodusha S.V. Using polynomial Volterra equations of the first kind in the automatic control problems. The question of the existence of solutions of polynomial integral Volterra equations of the first kind is considered. These equations appear in an automatic control problem of a nonlinear dynamic system of black box type with vector input.

Key words: Volterra equations of the first kind, nonlinear integral inequalities, system of automatic control.

Солодуша Светлана Витальевна, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией «Неустойчивые задачи вычислительной математики», e-mail: solodusha@isem.sei.irk.ru.

УДК 517.9

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРАВЛЕНИЯ ГРАДИЕНТНЫМИ СИСТЕМАМИ

© В.В. Стружанов, Н.В. Бурмашева

Ключевые слова: градиентная система; потенциальная функция; невыпуклость потенциалов; параметры состояния и управления; критические точки; сепаратриса; устойчивость управления.

Рассматривается один класс градиентных систем, поведение которых описывается невыпуклой потенциальной функцией, зависящей от конечного числа параметров состояния и управления. Показано, что устойчивость управления определяется сепаратрисой потенциальной функции, построенной в пространстве управлений. В качестве примера исследована устойчивость специальной стержневой системы, осуществляющей трехосное растяжение элементарного куба из нелинейного материала.

Рассмотрим один класс градиентных дискретных механических систем, к которому относятся, например, стержневые системы при их активном деформировании. В таких системах положение элементов опредляется конечным числом обобщенных координат (обобщенных перемещений). Часть этих координат могут быть задаваемыми величинами и представлять собой параметры управления. Тогда остальные играют роль параметров состояния. Поведение градиентной механической системы характеризуется ее потенциальной функцией $W(q_i, Q_j)(i = 1, ..., N; j = 1, ..., M)$, зависящей от параметров состояния q_i системы и параметров управления Q_j [1]. Эта функция есть сумма потенциальных функций элементов системы. Если часть потенциальных функций элементов системы являются невыпуклыми (имеют области выпуклости вниз, выпуклости вверх и седловые точки), то существует возможность потери устойчивости управления данными системами (потеря устойчивости процесса деформирования).

Положения равновесия системы определяют критические точки потенциальной функции W, которые являются решениями системы $\nabla_N W = 0$. Здесь ∇_N — оператор Гамильтона в евклидовом пространстве состояний R_e^N. В силу того, что некоторые потенциальные фукнции элементов системы являются невыпуклыми данные уравнения могут иметь одно или несколько решений, или вообще не иметь решения. Особое значение имеют вырожденные критические точки, в которых матрица устойчивости $H(W) = \nabla_N \nabla_N$ вырождена.