Литература

1. Н. Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.

2. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Finite dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet. Вестник Тамбовского унив. Сер.: Ест. техн. науки, 1998, том 3, вып. 1, 65–78.

Гармонический анализ на комплексном гиперболоиде [1]

© О. В. Гришина

Пусть $G = SL(2,\mathbb{C})$, H – диагональная подгруппа в G. Мы будем использовать следующее обозначение для характера группы $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$:

$$a^{\lambda,k} = |a|^{\lambda}\Big(\frac{a}{|a|}\Big)^{k},\ a \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \lambda \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$ и $2m \in \mathbb{Z}$. Представления $T_{\sigma,m}$ группы G действуют в некоторых пространствах $\mathcal{D}_{\sigma,m}$ функций $\varphi(z)$ на $\mathbb{C}$ по формуле

$$(T_{\sigma,m}(g)\varphi)(z) = \varphi\Big(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\Big)(\beta z+\delta)^{2\sigma,2m},\quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G.$$

Представление $T_{\sigma,m}$ обладает H-инвариантом θ тогда и только тогда, когда $m \in \mathbb{Z}$. Такой инвариант – единственный с точностью до множителя. Мы возьмем $\theta_{\sigma,m}(z) = z^{\sigma,m}$.

Группа G действует на пространстве $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ следующим образом: $x \mapsto g^{-1}xg$. Многообразие $\mathcal{X}$, состоящее из матриц

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-x_3 & x_2-x_1 \\ x_2+x_1 & 1+x_3 \end{pmatrix},$$

для которых $\det x = 0$, есть G-орбита G/H, это – гиперболоид $-x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$.

Инвариант $\theta_{\sigma,m}(z) = z^{\sigma,m}$ порождает преобразование Пуассона:

$$(P_{\sigma,m}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{C}}\Big\{\frac{z^2+1}{2}x_1+\frac{z^2-1}{2}x_2+zx_3\Big\}^{\sigma,m}\varphi(z)\,(i/2)dz\,d\overline{z}$$

Преобразование Пуассона сплетает представление $T_{-\sigma-2,m}$ с представлением группы G в функциях на $\mathcal{X}$ сдвигами. Сферическая функция $\Psi_{\sigma,m}$, отвечающая представлению $T_{\sigma,m}$, определяется как преобразование Пуассона H-инварианта: $\Psi_{\sigma,m}(x) = (P_{\sigma,m}\theta_{\sigma,m})(x)$, она зависит только от x_3 и $\overline{x}_3$. Введем на $\mathcal{X}$ орисферические координаты $\xi = (x_1+x_2)/(x_3+1)$, $\eta = (x_1-x_2)/(x_3+1)$. Сферическая функция $\Psi_{\sigma,m}$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$D\Psi_{\sigma,m}(x) = \lambda(\lambda+1)\Psi_{\sigma,m},\quad \overline{D}\Psi_{\sigma,m}(x) = \mu(\mu+1)\Psi_{\sigma,m},$$

где $\lambda = (\sigma+m)/2$, $\mu = (\sigma-m)/2$ и $D = (1-\xi\eta)^2\partial^2/\partial\xi\partial\eta$. Отсюда получаем выражение сферической функции через функции Лежандра:

$$\Psi_{\sigma,m}(x) = A[P_{\mu}(\overline{x}_3)P_{\lambda}(x_3)+(-1)^m P_{\mu}(-\overline{x}_3)P_{\lambda}(-x_3)],$$

[1] Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований: гранты 05-01-00074а и 07-01-91209 ЯФ_а, Научными Программами "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы": проект РНП.2.1.1.351 и Темплан No. 1.5.07.

где

$$A = 4^{-\sigma}\frac{\pi\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+3/2)\Gamma(\lambda+1/2)},$$

Дельта-функция $\delta(x)$ на $\mathcal{X}$, сосредоточенная в точке $x^0 = (0,0,1)$, разлагается по $\Psi_{\sigma,m}$ (эту формулу Планшереля мы получаем методом, отличным от метода Наймарка):

$$\delta(x) = c\int_0^\infty (m^2+\rho^2)\sum_{m\in\mathbb{Z}}\Psi_{-1+i\rho,m}(x)\,d\rho.$$

Об умножении обобщенных функций [1]

© Л. И. Грошева

Хорошо известно, что в пространстве обобщенных функций на прямой нельзя разумным образом определить произведение $f(x)g(x)$ для любых обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$, например, непонятно, что такое квадрат дельта-функции Дирака $\delta(x)$. В работе [1] авторы определяют произведение для введенных ими ранее так называемых *слабых* функций, в том числе для некоторых обобщенных функций. В качестве иллюстрации они вычисляют (с помощью длинных выкладок) два произведения:

$$\delta(x)\cdot\operatorname{sgn}x = 0,\quad x^{-1}\cdot\delta(x) = -\frac{1}{2}\,\delta'(x). \tag{1}$$

Нам показалось любопытным распространить эти результаты на более обширный класс обобщенных функций. Мы будем использовать аналитическое продолжение по параметру. Этот метод оказывается намного более быстрым по сравнению с [1]. Мы возьмем следующую совокупность обобщенных функций: $\delta^{(p)}(x)$ и x^{-r}, где $p\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$, $r\in\mathbb{Z}$. Они появляются как старшие лорановские (или тейлоровские) коэффициенты обобщенных функций $x^{\lambda,\varepsilon}$ в разложении в ряд по степеням $\lambda-m$ при целых m. Мы используем здесь обозначение $x^{\lambda,\varepsilon} = |x|^\lambda\operatorname{sgn}^\varepsilon x$, где $\lambda\in\mathbb{C}$, $\varepsilon\in\mathbb{Z}$. Наше определение произведения $f\circ g$ обобщенных функций f и g состоит в следующем: мы пишем естественную формулу для обычных функций:

$$x^{\lambda,\varepsilon}x^{\lambda+k,\nu} = x^{2\lambda+k,\varepsilon+\nu}, \tag{2}$$

где $k\in\mathbb{Z}$, затем рассматриваем ее как формулу для обобщенных функций, понимая их как аналитические продолжения по λ из полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > a$, где a – некоторое число (зависящее от k), далее разлагаем все функции из (2) в ряд Лорана (Тейлора) по степеням $\lambda-m$, $m\in\mathbb{Z}$, тогда формула (2) и даст нам произведение старших коэффициентов. Конечно, такое определение не является единственно возможным, оно зависит от способа введения параметра λ в показатели в левой части (2).

Мы получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&\delta^{(p)}(x)\circ\delta^{(q)}(x) = 0,\\
&x^{-r}\circ\delta^{(q)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^r\frac{q!}{(q+r)!}\delta^{(q+r)}(x),\\
&x^{-r}\circ x^{-s} = x^{-r-s},
\end{aligned} \tag{3}$$

[1] Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований: гранты No. 05-01-00074a и 07-01-91209 ЯФ_а, Научными Программами "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы": проект РНП.2.1.1.351 и Темплан No. 1.5.07.