

Национальной Программы Научных Исследований FUGE при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского Комитета по развитию университетской науки и образования (NUFU), грант PRO 06/02.

Поступила в редакцию 15 января 2008 г.

О КОРРЕКТНОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

© Т.В. Жуковская

При изучении процессов, в которых происходят быстрые изменения физических величин, эти изменения обычно считают мгновенным. Поэтому зависимость соответствующих физических величин от времени представляется разрывными функциями. Динамика таких процессов описывается импульсными дифференциальными уравнениями. В работе получено утверждение, позволяющее проверять корректность моделей, содержащих импульсные функционально-дифференциальные уравнения. Предполагается, что решение рассматриваемых уравнений в фиксированный момент времени $t_0 \in [a, b]$ подвергается импульсному воздействию, величина которого зависит от остояния системы на промежутке времени $[a, t_0]$. Используются результаты работы [1] о непрерывной зависимости от параметров решений абстрактных уравнений Вольтерры.

Обозначим $L([a, b], R^n)$ – пространство суммируемых функций $y : [a, b] \rightarrow R^n$, с нормой $\|y\|_L = \int_a^b |y(s)| ds$; $ACS([a, b], t_0, R^n)$, – пространство функций $x : [a, b] \rightarrow R^n$, при $t_0 \in [a, b]$ абсолютно непрерывных на $[a, t_0]$ и $(t_0, b]$, возможно терпящих в точке t_0 скачок, имеющих при почти всех $t \in [a, b]$ производную $\dot{x} \in L([a, b], R^n)$, с нормой $\|x\|_{ACS} = |x(a)| + |x(t_0+0) - x(t_0)| + \int_a^b |\dot{x}(s)| ds$, при $t_0 \notin [a, b]$ абсолютно непрерывных на всем $[a, b]$, $\dot{x} \in L([a, b], R^n)$, с нормой $\|x\|_{ACS} = |x(a)| + \int_a^b |\dot{x}(s)| ds$; $CS([a, b], t_0, R^n)$ – пространство функций $x : [a, b] \rightarrow R^n$, при $t_0 \in [a, b]$ непрерывных на $[a, t_0]$ и $(t_0, b]$, возможно терпящих в точке t_0 скачок, при $t_0 \notin [a, b]$ непрерывных на всем $[a, b]$, с нормой $\|x\|_{CS} = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$.

Пусть $t_0 \in [a, b]$, операторы $K_i, K : CS([a, b], t_0, R^n) \rightarrow L([a, b], R^n)$, $i = 1, 2, \dots$ являются непрерывными, ограниченными вольтерровыми, функционалы $P_i, P : CS([a, t_0], t_0, R^n) \rightarrow R^n$, $i = 1, 2, \dots$ непрерывны и ограничены.

Рассмотрим уравнения

$$\dot{x}_i = K_i x_i, \quad x_i(t_0 + 0) - x_i(t_0) = P_i x_i^{t_0}, \quad (1i)$$

$$\dot{x} = K x, \quad x(t_0 + 0) - x(t_0) = P x^{t_0}, \quad (1)$$

где $x_i^{t_0}, x^{t_0} \in CS([a, t_0], t_0, R^n)$ является сужениями на $[a, t_0]$ функций $x_i, x \in CS([a, b], t_0, R^n)$.

Т е о р е м а. Пусть для любой сходящейся последовательности функций $x_i \in CS([a, b], t_0, R^n)$, $\|x_i - x\|_{CS} \rightarrow 0$ выполнено $\|K_i x_i - K x\|_L \rightarrow 0$, $|P_i x_i^{t_0} - P x^{t_0}| \rightarrow 0$. Пусть для любого положительного числа r существует такая функция $g_r \in L([a, b], R^n)$, что для каждого $x \in CS([a, b], t_0, R^n)$, удовлетворяющего неравенству $\|x\|_{CS} \leq r$, при любом $i = 1, 2, \dots$ выполнено неравенство $|(K_i x)(t)| \leq g_r(t)$ почти всюду на $[a, b]$. Тогда при каждом i уравнение (1i) и уравнение (1) локально разрешимы, всякое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения. Кроме того, существует такое $\beta > 0$, что:

для любого i и для каждого предельно продолженного решения $z_{i\eta_i}$ уравнения (1i), определенного на $[a, a + \eta_i)$, выполнено $\eta_i > \beta$;

для каждого предельно продолженного решения z_η уравнения (1), определенного на $[a, a + \eta)$, выполнено $\eta > \beta$;

если при каждом i произвольно выбрать определенное на $[a, a + \beta]$ локальное решение $z_{i\beta}$ уравнения (1i), то полученная последовательность будет компактна в пространстве $ACCS([a, a + \beta], t_0, R^n)$, все её предельные точки будут локальными решениями уравнения (1);

если локальное определенное на $[a, a + \beta]$ решение z_β уравнения (1) единственно, то для любой последовательности локальных определенных на $[a, a + \beta]$ решений $z_{i\beta}$ уравнений (1i) имеет место $\|z_{i\beta} - z_\beta\|_{ACCS([a, a + \beta], t_0, R^n)} \rightarrow 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Е.С. Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Мат. сборник. 2006. Т. 197. №. 10. С. 33–56.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 07-01-00305).

Поступила в редакцию 15 января 2008 г.