

где $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ и $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$, так что G есть единичная сфера в $\mathbb{R}^4$. В качестве инвариантной меры на G возьмем евклидову меру $dg = |v|^{-1} dx dy du$ на этой сфере. Мера всей группы равна $2\pi^2$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G изоморфна $\mathbb{R}^3$, в качестве базиса в $\mathfrak{g}$ возьмем следующие матрицы:

$$L_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Экспоненциальное отображение сопоставляет матрице $X = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3$ из $\mathfrak{g}$ матрицу

$$e^X = \cos \|X\| \cdot E + \frac{\sin \|X\|}{\|X\|} \cdot X$$

из G , здесь E – единичная матрица, норма $\|X\|$ отвечает скалярному произведению $\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Это скалярное произведение только множителем отличается от формы Киллинга. Квадратный корень из якобиана экспоненциального отображения есть

$$J(X) = \frac{\sin \|X\|}{\|X\|}.$$

Неприводимые представления T_l группы G нумеруются числами $l = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$, характер χ_l представления T_l есть

$$\chi_l(e^X) = \frac{\sin(2l+1)\|X\|}{\sin \|X\|}.$$

Формула Кириллова в нашем случае есть

$$\int e^{i\langle \xi, x \rangle} \chi_l(e^X) J(X) dX = 4\pi^2 \cdot \delta(\|\xi\|^2 - (2l+1)^2),$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака на прямой, $dX = dx_1 dx_2 dx_3$, интеграл берется по $\mathbb{R}^3$. В частности, для $l = 0$ имеем

$$\int e^{i\langle \xi, x \rangle} J(X) dX = 4\pi^2 \cdot \delta(\|\xi\|^2 - 1).$$

Дифференцируя это по ξ_k и принимая во внимание, что матричные элементы представления T_l являются линейными функциями от x_1, x_2, x_3 , мы получаем

$$\int e^{i\langle \xi, x \rangle} T_l(X) J(X) dX = -8\pi^2 i \cdot T_l(Y) \cdot \delta'(\|\xi\|^2 - 1),$$

где $Y = \xi_1 L_1 + \xi_2 L_2 + \xi_3 L_3$.

Асимптотическое разложение преобразования Березина для пространств ранга два ¹

© С. В. Цыкина

В [2] мы рассматривали полиномиальное квантование на пара-эрмитовых симметрических пространствах G/H , где $G = \mathrm{SO}_0(p, q)$, связная компонента единицы H_e есть

¹Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований: гранты 05-01-00074а, 07-01-91209 ЯФ_а, Голландской Организацией Научных Исследований (NWO): грант 047-017-015, Научными Программами "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы": проект РНП.2.1.1.351 и Темплан No. 1.5.07.

$\mathrm{SO}_0(p-1, q-1) \times \mathrm{SO}_0(1, 1)$. Размерность этих пространств равна $2n-4$, где $n = p+q$, ранг равен 2. На G/H имеется два оператора Лапласа, это дифференциальные операторы Δ_2 и Δ_4 порядка 2 и 4, соответственно. В настоящей работе мы предлагаем формулу для полного асимптотического разложения преобразования Березина $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\sigma$, $\sigma \in \mathbb{C}$. Напомним [2] явное выражение преобразования $\mathcal{B}$ через операторы Лапласа. Обозначим $m = (n-4)/2$. Мы имеем

$$\mathcal{B} = \frac{\Gamma(\sigma+n-2+k)\Gamma(\sigma+1-k)}{\Gamma(\sigma+n-2)\Gamma(\sigma+1)} \cdot \frac{\Gamma(\sigma+m+2+l)\Gamma(\sigma+m+1-l)}{\Gamma(\sigma+m+2)\Gamma(\sigma+m+1)}. \quad (1)$$

Здесь k, l – некоторые переменные. Фактически правая часть (1) зависит от λ_2 и λ_4 , где $\lambda_2 = 2(a_1 + a_2)$, $\lambda_4 = 16(a_1a_2 - ma_1 + m^2a_2)$ и $a_1 = k(k+n-3)$, $a_2 = l(l+1)$. Теперь вместо λ_2 и λ_4 надо подставить Δ_2 и Δ_4 , соответственно.

Эта формула равносильна тому, что собственное число оператора $\mathcal{B}$ на неприводимом подпространстве со старшим весом $(k+l, k-l)$, где $k, l \in \mathbb{N}$, $k \geq l$, есть

$$b_{k,l} = \frac{(\sigma+n-2)^{[k]}}{\sigma^{(k)}} \cdot \frac{(\sigma+m+2)^{[l]}}{(\sigma+m)^{(l)}},$$

мы используем обозначения: $x^{[r]} = x(x+1)\dots(x+r-1)$, $x^{(r)} = x(x-1)\dots(x-r+1)$. С помощью одной формулы из [1] мы находим:

$$b_{k,l} = \sum_{s=0}^k \frac{P_s}{\sigma^{(s)}} \cdot \sum_{t=0}^l \frac{Q_t}{(\sigma+m)^{(t)}},$$

где

$$P_s = \frac{1}{s!} \prod_{j=0}^{s-1} \{a_1 - j(j+n-3)\}, \quad Q_t = \frac{1}{t!} \prod_{j=0}^{t-1} \{a_2 - j(j+1)\}.$$

Искомая формула дает $\mathcal{B}$ в виде двойного ряда по переменным $s, t \in \mathbb{N}$, $s \geq t$:

$$\mathcal{B} = \sum \frac{M_{st}}{\sigma^{(s)}(\sigma+m)^{(t)}},$$

где M_{st} – многочлен от Δ_2 и Δ_4 (δ_{st} – символ Кронекера):

$$M_{st} = P_s Q_t (1 - \delta_{st}) + Q_s \sum_{r=0}^t \binom{s-r}{t-r} P_r m^{[t-r]}.$$

Литература

1. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Polynomial quantization on rank one para-Hermitian symmetric spaces. Acta Appl. Math., 2004, vol. 81, Nos. 1–3, 215–232.
2. S. V. Tsykina. Polynomial quantization on para-hermitian spaces with pseudo-orthogonal group of translations. Int. Workshop "Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics", Moscow, Aug. 25–30, 2007, vol. II, 63–71.