УДК 517.95
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2138-2142

ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА СЕТИ

© А.А. Парт
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»
394064, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54а
E-mail: anna_razinkova@mail.ru

Доказана единственность слабого решения третьей начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа с распределенными параметрами на ориентированном ограниченном графе, граничные условия которой сведены к однородным.
Ключевые слова: граф; гиперболическое уравнение; начально-краевая задача; слабое решение

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается единственность слабого решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с распределенными параметрами на произвольном ориентированном графе. Такие решения определяются с помощью интегральных тождеств, заменяющих собой уравнения, начальные и граничные условия. Полученные результаты являются основополагающими при исследовании задач оптимального управления колебаниями сетеподобных промышленных конструкций.

Центральная идея, определившая все содержание настоящей статьи, состоит в применении используемых в [1, с. 146, 196] подходов к анализу таких задач и обобщении известных классических утверждений об однозначной разрешимости начально-краевых задач.

Данная работа является продолжением исследования существования слабого решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с распределенными параметрами на произвольном ориентированном графе [2–3].

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Используются обозначения, принятые в работах [4–5]: ребра γ графа Γ имеют одинаковую длину и параметризованы отрезком $[0,1]$; $\partial\Gamma$ – множество граничных узлов ξ, $J(\Gamma)$ – множество внутренних ξ узлов графа Γ; Γ_0 – объединение всех ребер, не содержащих концевых точек; $\Gamma_T=\Gamma_0\times(0,T)$ $(\Gamma_t=\Gamma_0\times(0,t))$, $\partial\Gamma_T=\partial\Gamma\times(0,T)$ $(\partial\Gamma_t=\partial\Gamma\times(0,t))$.

Обозначим через $L_2(\Gamma)$ пространство функций, интегрируемых с квадратом на Γ (аналогично вводится пространство $L_2(\Gamma_T)$, $\Gamma_T=\Gamma\times(0,1)$); $W_2^1(\Gamma)$ – пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из $L_2(\Gamma)$; $W_2^1(\Gamma_T)$ – пространство функций из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка из $L_2(\Gamma_T)$; $L_{2,1}(\Gamma_T)$ – пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}=\int\limits_0^T(\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx)^{1/2}dt$; $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ – пространство функций $u(x,t)$ из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по x, принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$, $\|u\|^2_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)}=$

$$=\int\limits_{\Gamma_T}\left(u^2(x,t)+\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x}\right)dxdt.$$

Рассмотрим билинейную форму

$$l(\mu,v)=\int\limits_\Gamma\left(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}+b(x)\mu(x)v(x)\right)dx$$

с фиксированными измеримыми ограниченными на Γ_0 коэффициентами $a(x)$, $b(x)$. Обозначим через $\Omega(a,\Gamma)$ множество непрерывных во всех внутренних узлах $J(\Gamma)$ функций $u(x)$ из класса $W_2^1(\Gamma)$, для которых сужение $\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right)_{\gamma_k}$ непрерывно во всех концевых точках ребер $\gamma_k\,(k=\overline{1,m})$ [6], при этом $u(x)$ удовлетворяют соотношениям $\sum\limits_{\gamma_j\in R(\xi)}a(1)_{\gamma_j}\frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx}=\sum\limits_{\gamma_j\in r(\xi)}a(1)_{\gamma_j}\frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx}$ во всех узлах

$\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «к узлу ξ»; $r(\xi)$ – множество ребер ориентированных «от узла ξ»; через $u(\cdot)_\gamma$ обозначено сужение функции $u(\cdot)$ на ребро γ). Замыкание $\Omega(a,\Gamma)$ в норме $W_2^1(\Gamma)$ обозначим через $W_2^1(a,\Gamma)$. Пусть далее $\Omega_1(a,\Gamma_T)$ – множество функций $u(x,t) \in W_2^1(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t=t_0$ ($t_0 \in [0,T]$) как функции класса $W_2^1(a,\Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям $\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{du(1,t)_{\gamma_j}}{dx} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{du(1,t)_{\gamma_j}}{dx}$ для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_1(a,\Gamma_T)$ в норме $W_2^1(\Gamma_T)$ обозначим через $W_2^1(a,\Gamma_T)$. Множество $\hat{W}_2^1(a,\Gamma_T)$ состоит из элементов $W_2^1(a,\Gamma_T)$, равных нулю при $t=T$. Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества функций из Ω, равных нулю во всех узлах $\xi \in \partial\Gamma$, обозначим через $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В пространстве $W_2^1(a,\Gamma_T)$ изучается третья краевая задача, граничные условия которой сведены к однородным:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)u(x,t) = f(x,t), \quad (1)$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

$$\left(\alpha u(x,t) + a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\Bigg|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad (3)$$

здесь $\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha \ge 0$, $\varphi(x) \in W_2^1(a,\Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Для коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ справедливы предположения

$$0 < a_* \le a(x) \le a^*, \ |b(x)| \le \tilde{b}, \ x \in \Gamma. \quad (4)$$

Определение 1. *Обобщенным решением класса* $W_2^1(\Gamma_T)$ *краевой задачи (1)–(3) называется функция* $u(x,t) \in W_2^1(\Gamma_T)$, *равная* $\varphi(x)$ *при t = 0 и удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int_{\Gamma_T}\left(-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} + b(x)u(x,t)\eta(x,t)\right)dxdt +$$
$$+ \int_{\partial\Gamma_T} \alpha u(x,t)\eta(x,t)dxdt = \int_{\Gamma}\psi(x)\eta(x,0)dx + \int_{\Gamma_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt \quad (5)$$

при любых $\eta(x,t) \in W_2^1(a,\Gamma_T)$, $\eta(x,T) = 0$.

Теорема 1. *Для любых* $\varphi(x) \in W_2^1(a,\Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ *и при выполнении предположений (4) начально-краевая задача (1)–(3) имеет обобщенное решение из* $W_2^1(a,\Gamma_T)$.

Здесь не приводится доказательство теоремы, полное доказательство можно найти в [3, с. 22].

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1, начально-краевая задача (1)–(3) имеет не более одного обобщенного решения из пространства* $W_2^1(a,\Gamma_T)$.

Доказательство. Пусть задача (1)–(3) имеет два обобщенных решения $u_1, u_2 \in W_2^1(a,\Gamma_T)$, тогда их разность $u = u_1 - u_2$ принадлежит $W_2^1(a,\Gamma_T)$ и удовлетворяет тождеству (5) с $f = \psi = 0$ и при *t = 0* обращается в нуль. Возьмем в этом тождестве

$$\eta(x,t) = \begin{cases} 0, \ \tau \le t \le T, \\ \int_{\tau}^{t} u(x,\varsigma)d\varsigma, \ 0 \le t \le \tau \end{cases} \quad (6)$$

с произвольной фиксированной $\tau \in [0,T]$. Ясно, что $\eta(x,t) \in \hat{W}_2^1(a,\Gamma_T)$ и имеет обобщенные производные $\eta_{tx} = u_x \in L_2(\Gamma_T)$ и $\eta_x \in L_2(\Gamma_T)$, кроме того η, η_x и *u* являются элементами $L_2(\Gamma)$, непрерывно зависящими от $t \in [0,T]$. Подставляя $\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}$ в (5) ($f = \psi = 0$), получим

$$\int_{\Gamma_\tau}\left(\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2}\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} - a(x)\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t \partial x}\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} - b(x)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\eta(x,t)\right)dxdt - \quad (7)$$
$$- \int_{\partial\Gamma_\tau} \alpha \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\eta(x,t)dxdt = 0$$

и после интегрирования, учитывая

$$\eta_t(x,0) = u(x,0) = 0 \ \text{и} \ \eta_x(x,\tau) = 0,$$

приходим к

$$\int_{\Gamma}\left(\left(\frac{\partial^2 \eta(x,\tau)}{\partial t^2}\right)^2 + a(x)\left(\frac{\partial \eta(x,0)}{\partial x}\right)^2\right)dx + \alpha\int_{\partial\Gamma}\eta^2(x,0)dx =$$
$$= 2\int_{\Gamma_\tau} b(x)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\eta(x,t)dxdt.$$

Далее в силу (4)

$$\int_{\Gamma}\left(\left(\frac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial t}\right)^2+a(x)\left(\frac{\partial\eta(x,0)}{\partial x}\right)^2\right)dx+\alpha\int_{\partial\Gamma}\eta^2(x,0)dx\le \le\tilde{b}\int_{\Gamma_\tau}\left(\left(\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)^2+\eta^2(x,t)\right)dxdt. \quad (8)$$

Для почти всех $x\in\Gamma$ справедливо

$$\int_0^\tau\eta^2(x,t)dt=\int_0^\tau\left(\int_\tau^t u(x,\varsigma)d\varsigma\right)^2dt\le \le\int_0^\tau(\tau-t)\int_\tau^t u^2(x,\varsigma)d\varsigma dt\le\tau^2\int_0^\tau u^2(x,\varsigma)d\varsigma \quad (9)$$

и, учитывая $\dfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}=u(x,t)$, неравенство (8) преобразуется к виду

$$\int_\Gamma u^2(x,\tau)dx+\int_\Gamma a(x)\left(\frac{\partial\eta(x,0)}{\partial x}\right)^2dx+\alpha\int_{\partial\Gamma}\eta^2(x,0)dx\le \le\tilde{b}\int_{\Gamma_\tau}\left(u^2(x,t)+\eta^2(x,t)\right)dxdt.$$

В силу оценки (9), последнее неравенство примет вид:

$$\int_\Gamma u^2(x,\tau)dx+\int_\Gamma a(x)\left(\frac{\partial\eta(x,0)}{\partial x}\right)^2dx+\alpha\int_{\partial\Gamma}\eta^2(x,0)dx\le \le\tilde{b}\int_{\Gamma_\tau}\left(u^2(x,t)+\tau^2u^2(x,t)\right)dxdt,$$

упростив, перенесем правую часть налево

$$\int_\Gamma u^2(x,\tau)dx-\tilde{b}\left(1+\tau^2\right)\int_{\Gamma_\tau}u^2(x,t)dxdt+ +\int_\Gamma a(x)\left(\frac{\partial\eta(x,0)}{\partial x}\right)^2dx+\alpha\int_{\partial\Gamma}\eta^2(x,0)dx\le 0$$

Полученное неравенство умножим на $e^{-\tilde{b}\int_0^\tau(1+t^2)dt}$ и интегрируем от 0 до τ:

$$\int_0^\tau\left(e^{-\tilde{b}\int_0^\varsigma(1+t^2)dt}\int_\Gamma u^2(x,\tau)dx\right)d\varsigma- -\int_0^\tau\left(\tilde{b}\left(1+\varsigma^2\right)e^{-\tilde{b}\int_0^\varsigma(1+t^2)dt}\int_{\Gamma_\varsigma}u^2(x,t)dxdt\right)d\varsigma+ +\int_0^\tau\left(e^{-\tilde{b}\int_0^\varsigma(1+t^2)dt}\int_\Gamma a(x)\left(\frac{\partial\eta(x,0)}{\partial x}\right)^2dx\right)d\varsigma+ +\int_0^\tau\left(\alpha e^{-\tilde{b}\int_0^\varsigma(1+t^2)dt}\int_{\partial\Gamma}\eta^2(x,0)dx\right)d\varsigma\le 0.$$

Второе слагаемое интегрируем по частям:

$$\int_0^\tau\left(e^{-\tilde{b}\int_0^\varsigma(1+t^2)dt}\int_\Gamma u^2(x,\tau)dx\right)d\varsigma+\left(e^{-\tilde{b}\int_0^\varsigma(1+t^2)dt}\int_0^\varsigma\int_\Gamma u^2(x,t)dxdt\right)\Bigg|_0^\tau- -\int_0^\tau\left(e^{-\tilde{b}\int_0^\varsigma(1+t^2)dt}\int_\Gamma u^2(x,\tau)dx\right)d\varsigma+ +\int_0^\tau\left(e^{-\tilde{b}\int_0^\varsigma(1+t^2)dt}\right)d\varsigma\int_\Gamma a(x)\left(\frac{\partial\eta(x,0)}{\partial x}\right)^2dx+ +\alpha\int_0^\tau\left(e^{-\tilde{b}\int_0^\varsigma(1+t^2)dt}\right)d\varsigma\int_{\partial\Gamma}\eta^2(x,0)dx\le 0.$$

Выполняя подстановку, учитываем, что $u(x,0)=0$, приходим к неравенству:

$$e^{-\tilde{b}\int_0^\tau(1+t^2)dt}\int_{\Gamma_\tau}u^2(x,t)dxdt+\int_0^\tau\left(e^{-\tilde{b}\int_0^\varsigma(1+t^2)dt}\right)d\varsigma\int_\Gamma a(x)\left(\frac{\partial\eta(x,0)}{\partial x}\right)^2dx+ +\alpha\int_0^\tau\left(e^{-\tilde{b}\int_0^\varsigma(1+t^2)dt}\right)d\varsigma\int_{\partial\Gamma}\eta^2(x,0)dx\le 0.$$

Отсюда следует равенство нулю на Γ_τ всех слагаемых, т. е. $u^2(x,t)=0$, $\dfrac{\partial\eta(x,0)}{\partial x}=0$ и $\eta(x,0)=0$. Учитывая произвольность выбора $\tau\in[0,T]$ получаем $u(x,t)=0$ почти всюду на Γ_T. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказана единственность слабого решения третьей начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа с распределенными параметрами на ориентированном ограниченном графе, граничные условия которой сведены к однородным. Представленные результаты являются основополагающими в задачах оптимального управления эволюционными системами на сетях [7–8] и анализе сетевых коммерческих математических моделей [9–10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
2. *Парт А.А.* Начально-краевая задача для уравнения гиперболического типа и ее разрешимость // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016): сб. тр. 9 Междунар. конф. Воронеж, 2016. С. 266-268.

3. *Парт А.А.* Разрешимость начально-краевой задачи гиперболического типа с распределенными параметрами на графе // Системы управления и информационные технологии. 2016. № 3. С. 19-23.
4. *Провоторов В.В., Волкова А.С.* Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Научная книга, 2014. 188 с.
5. *Подвальный С.Л., Провоторов В.В.* Оптимизационные задачи для эволюционных систем с распределенными параметрами на графе // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014): сб. тр. 7 Междунар. конф. Воронеж, 2014. С. 282-286.
6. *Волкова А.С., Провоторов В.В.* Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.
7. *Provotorov V.V.* Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph // Stability and Control Processes: International Conference in Memory of V.I. Zubov (SCP). St. Petersburg, 2015. P. 126-128.
8. *Podvalny S.L., Provotorov V.V.* The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph // Stability and Control Processes: International Conference in Memory of V.I. Zubov (SCP). St. Petersburg, 2015. P. 117-119.
9. *Сергеев С.М.* Математическое моделирование сети торговых предприятий // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2012. Т. 8. № 1. С. 66-71.
10. *Сидненко Т.И., Сергеев С.М.* Моделирование движений порожденного спроса на аграрном рынке в условиях асимметрии информации // Известия Санкт-Петербургского государственного аграрного университета. 2015. № 39. С. 268-270.

Поступила в редакцию 19 сентября 2016 г.

Парт Анна Александровна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, преподаватель 206 кафедры, e-mail: anna_razinkova@mail.ru

UDC 517.95
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2138-2142

UNIQUENESS OF THE WEAK SOLUTION OF THE THIRD INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS ON A NETWORK

© A.A. Part
Military Training and Research Center of the Air Force “Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin”
54a Starykh Bolshevikov St., Voronezh, Russian Federation, 394064
E-mail: anna_razinkova@mail.ru

We prove the uniqueness of the weak solution of the third initial-boundary value problem for hyperbolic equations with distributed parameters on a limited oriented graph, the boundary conditions which are reduced to a uniform.
Key words: graph; hyperbolic equation; boundary value problem; weak solution

REFERENCES

1. Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-value problems of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 407 p. (In Russian).
2. Part A.A. Nachal'no-kraevaya zadacha dlya uravneniya giperbolicheskogo tipa i ee razreshimost' [Initial boundary value problem for an equation of hyperbolic type and its solvability]. *Sbornik trudov 9 Mezhdunarodnoy konferentsii «Sovremennye metody prikladnoy matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologiy (PMTUKT-2016)».* [Proceedings of the International Conference 9 “Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology (PMTUKT 2016)”]. Voronezh, 2016, pp. 266-268. (In Russian).
3. Part A.A. Razreshimost' nachal'no-kraevoy zadachi giperbolicheskogo tipa s raspredelennymi parametrami na grafe [The solvability of the initial boundary value problem of hyperbolic type with distributed parameters on the graph]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii – Control systems and information technologies*, 2016, no. 3, pp. 19-23. (In Russian).
4. Provotorov V.V., Volkova A.S. *Nachal'no-kraevye zadachi s raspredelennymi parametrami na grafe* [Initial-boundary value problems with distributed parameters on the graph]. Voronezh, Science Book Publ., 2014. 188 p. (In Russian).
5. Podval'nyy S.L., Provotorov V.V. Optimizatsionnye zadachi dlya evolyutsionnykh sistem s raspredelennymi parametrami na grafe [Optimization problems for evolutionary systems with distributed parameters on the graph]. *Sbornik trudov 7 Mezhdunarodnoy konferentsii «Sovremennye metody prikladnoy matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologiy (PMTUKT-2014)»* [Proceedings of the 7 International Conference “Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology (PMTUKT 2014)”]. Voronezh, 2014, pp. 282-286. (In Russian).
6. Volkova A.S., Provotorov V.V. Obobshchennye resheniya i obobshchennye sobstvennye funktsii kraevykh zadach na geometricheskom grafe [Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary value problems on geometrical graph]. *Izvestiya vysshikh*

uchebnykh zavedeniy. Matematika – Proceedings of the higher educational institutions. Mathematics, 2014, no. 3, pp. 3-18. (In Russian).
7. Provotorov V.V. Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph. *International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP)*, St. Petersburg, 2015, pp. 126-128.
8. Podvalny S.L., Provotorov V.V. The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph. *International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP)*, St. Petersburg, 2015, pp. 117-119.
9. Sergeev S.M. Matematicheskoe modelirovanie seti torgovykh predpriyatiy [Mathematical modeling of the network of trade enterprises]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Herald of the Voronezh State Technical University*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 66-71. (In Russian).
10. Sidnenko T.I., Sergeev S.M. Modelirovanie dvizheniy porozhdennogo sprosa na agrarnom rynke v usloviyakh asimmetrii informatsii [Modelling of motions generated by the demand for the agricultural market in the conditions of information asymmetry]. *Izvestiya Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta – Bulletin of St. Petersburg State Agrarian University*, 2015, no. 39, pp. 268-270. (In Russian).

Received 19 September 2016

Part Anna Aleksandrovna, Military Training and Research Center of the Air Force "Air Force Academy named after professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin", Voronezh, Russian Federation, Lecturer of 206 Department, e-mail: anna_razinkova@mail.ru

Информация для цитирования:

Парт А.А. Единственность слабого решения начально-краевой задачи гиперболического типа с распределенными параметрами на сети // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2138-2142. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2138-2142

Part A.A. Edinstvennost' slabogo resheniya nachal'no-kraevoy zadachi giperbolicheskogo tipa s raspredelennymi parametrami na seti [Uniqueness of the weak solution of the third initial-boundary value problem for hyperbolic equations with distributed parameters on a network]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences,* 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2138-2142. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2138-2142 (In Russian).