УДК 519.3

ОБ ОДНОМ УСТОЙЧИВОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

© А.С. Апарцин, И.В. Сидлер

Ключевые слова:численное дифференцирование; неклассическое интегральное уравнение Вольтерра I рода; метод квадратур.

Предложен метод восстановления производной, построенный на основе численного решения неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода.

Удобным математическим аппаратом моделирования развивающихся динамических систем, элементы которых принадлежат разным возрастным группам, являются интегральные уравнения Вольтерра I рода вида

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $a_0(t) \equiv t > a_1(t) > \dots > a_n(t) \equiv 0$, $a_i'(t) \geqslant 0$, $a_1'(0) < 1$, $a_i(0) = 0 \ \forall i$, $K_i(t,s)$ – коэффициенты эффективности функционирования элементов $x(s)$ i-ой возрастной группы G_i ($x(s) \in G_i$, если $t-s \in \big[t-a_{i-1}(t), t-a_i(t)\big)$); $y(t)$ – интегральный показатель уровня развития системы [1], [2]. В частности, при $a_i(t) = \alpha_i t$, $1 = \alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_n = 0$, $K_i(t,s) = \beta_i = \mathrm{const}$ уравнение (1) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int\limits_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Хорошо известно, что метод разделенных разностей, а также эквивалентный ему соответствующий метод квадратур численного решения классического уравнения Вольтерра I рода с единичным ядром порождают саморегуляризующий алгоритм восстановления производной, в котором роль параметра регуляризации играет шаг сетки, согласованный с уровнем погрешности исходных данных [3]. Аналогичный подход применительно к (2) и является предметом исследования в данной работе.

Положим в (2) $n = 2$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \mathrm{const}$, $\alpha_2 = 0$, так что (1) дает

$$\int\limits_0^t x(s)ds + \gamma \int\limits_0^{\alpha t} x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \quad \gamma = \beta_2 - 1, \quad \alpha = \alpha_1 \in (0,1). \tag{3}$$

При $\gamma = 0$ ($\alpha = 0$) решением (3), если $y(t) \in C^{(1)}_{[0,T]}$ и $y(0) = 0$, является $y'(t)$. В [4] изложен модифицированный метод левых прямоугольников численного решения (2), имеющий первый порядок сходимости по шагу сетки. Применительно к (3) этот метод сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$h\sum_{j=0}^{i-1} x_j^h + h\gamma \sum_{j=0}^{[\alpha i]-1} x_j^h + h\gamma(\alpha i - [\alpha i])x^h_{[\alpha i]} = y_i, \quad i = \overline{1,N}, \tag{4}$$

где $h = \frac{T}{N}$, $y_i = y(ih)$, x_i^h – сеточная аппроксимация $y'(ih)$, $[\cdot]$ – целая часть числа. Программная реализация (4) описана в [5]. Если вместо $y(t)$ задана функция $\tilde{y}(t)$ такая, что

$$\max_{t\in[0,T]} |y(t) - \tilde{y}(t)| \leqslant \delta,$$

то вместо (4) имеем

$$h\sum_{j=0}^{i-1} \tilde{x}_j^h + h\gamma \sum_{j=0}^{[\alpha i]-1} \tilde{x}_j^h + h\gamma(\alpha i - [\alpha i])\tilde{x}_{[\alpha i]}^h = \tilde{y}_i, \quad i = \overline{1,N}. \tag{5}$$

Погрешность сеточного решения (5) (обозначим его $\tilde{x}^{h,\alpha,\gamma}$)

$$\tilde{\varepsilon}^{h,\alpha,\gamma} \triangleq \max_{i=\overline{0,[\frac{T}{h}]}} \left| y'(ih) - \tilde{x}_i^{h,\alpha,\gamma} \right|$$

имеет три составляющих. Первую дает погрешность метода квадратур; вторая обусловлена введением дополнительного слагаемого в (3); третья отражает влияние погрешности исходных данных.

Расчеты, проведенные для ряда тестовых примеров по программе [5], позволили проанализировать характер взаимодействия этих составляющих и выработать некоторые рекомендации по применению алгоритма (5).

Рассмотрим, например, задачу восстановления производной от функции $y(t) = \frac{t^2}{2}$ на отрезке $[0,1]$. При фиксированном δ зададим «пилообразное» возмущение:

$$\tilde{y}_i = \frac{ih^2}{2} + (-1)^i\delta.$$

Как известно [3], выбор шага стандартного метода левых прямоугольников ($\gamma = 0$) $h(\delta) \asymp \delta^{1/2}$ обеспечивает оценку $\tilde{\varepsilon}^h = \mathcal{O}(\delta^{1/2})$, которую хорошо иллюстрирует таблица 1 (при уменьшении δ в 100 раз оптимальный шаг $\tilde{h}_{\text{опт}}$ и соответствующая погрешность $\tilde{\varepsilon}_{\text{опт}}$ уменьшаются в 10 раз). Оптимизация дополнительных параметров α и γ сохраняет асимптотику $h(\delta)$ и $\tilde{\varepsilon}^{h(\delta)}$ в общем случае неизменной, однако алгоритм (5) позволяет, например, при фиксированном δ и $h = \frac{1}{2}$ получить численное решение с любой требуемой точностью за счет «тонкой» настройки α и γ (см. таблицу 2).

Таблица 1

δ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$\tilde{h}_{\text{опт}}$	0,631944	0,201388	0,0625
$\tilde{\varepsilon}^{h,0,0}$	0,632456	0,2	0,06325

Таблица 2

γ	α	$\tilde{\varepsilon}^{1/2,\alpha,\gamma}$
60,0	0,51	0,001582
600,0	0,501	0,000166
6000,0	0,5001	0,000017

Этот эффект может быть распространен на большее число узлов сетки за счет выбора в (2) $n > 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Апарцин А.С., Сидлер И.В.* Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 3-16.

2. *Апарцин А.С., Сидлер И.В.* Интегральные модели развития систем электроэнергетики с учетом старения оборудования электростанций // Электронное моделирование. 2014. Т. 36. № 4. С. 81-88.

3. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.

4. *Апарцин А.С., Сидлер И.В.* Численное решение уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Сборник трудов Международного симпозиума «Обобщенные постановки и решения задач управления». М.: АНО «Издательство физико-математической литературы», 2014. С. 21-25.

5. *Сидлер И.В.* Программное средство для численного решения неклассических уравнений Вольтерра I рода модифицированным методом левых прямоугольников // А.с. № 2015612206, опубл. 13.02.2015.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ № 15-01-01425а.

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Apartsyn A.S., Sidler I.V. ON ONE STABLE METHOD FOR NUMERICAL DIFFERENTIATION

Method for numerical differentiation is proposed. It is based on numerical solving nonclassical Volterra equation of the first kind.

Key words: numerical differentiation; nonclassical Volterra equation of the first kind; quadrature method.

Апарцин Анатолий Соломонович, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, e-mail: apartsyn@isem.sei.irk.ru

Apartsyn Anatoly Solomonovich, Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, e-mail: apartsyn@isem.sei.irk.ru

Сидлер Инна Владимировна, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, e-mail: krlv@isem.sei.irk.ru

Sidler Inna Vladimirovna, Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor, Senior Researcher, e-mail: krlv@isem.sei.irk.ru

УДК 351.814

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК МЕТОД ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ КОНТРАКТА, ОСНОВАННОГО НА ПОКАЗАТЕЛЯХ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

© **М.Р. Асадуллин, П.М. Симонов**

Ключевые слова: контракт, основанный на показателях деятельности; экономико-математическая модель эксплуатации парка двигателей; постановка задачи поиска оптимальных условий контракта основанного на показателях деятельности.

В статье описан положительный зарубежный опыт применения контрактов, основанных на показателях деятельности, на послепродажное обслуживание авиационной техники. Приведены результаты моделирования эксплуатации парка двигателей по традиционным контрактам, проиллюстрированы проблемы, с которыми может столкнуться заказчик в условиях традиционных контрактов. Дана постановка задачи определения оптимальных условий контракта, основанного на показателях деятельности.