УДК 517.958

ОБ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ ЕГО СЖАТИИ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ

© **В.Л. Дильман, А.Н. Дияб**

Ключевые слова: пластический слой; плоская деформация; осадка; напряженно-деформированное состояние; гипотеза плоских сечений; линии тока; обратная граничная задача; система уравнений гиперболического типа.

Исследуется напряженно-деформированное состояние пластического слоя в процессе его сжатия при наличии скольжения между плоскими контактными поверхностями в условиях плоской деформации. Полученные аналитические зависимости позволяют находить все механические и геометрические параметры процесса либо в виде явных приближенных формул, либо на основе итерационных вычислительных схем.

Сжатие пластического слоя впервые изучалось в работе [1] и затем многими авторами. Обычно напряжения на контактной поверхности между слоем и сжимающими поверхностями неизвестны. Для определения сжимающего усилия необходимо решить обратную граничную задачу нахождения нормальных напряжений на контактной поверхности. Система уравнений этой задачи квазилинейна. При плоской деформации она имеет гиперболический тип. Рассматриваются различные математические модели процесса сжатия. Обычно они основываются, во-первых, на технологических особенностях: величине трения при скольжении контактных поверхностей, наличии деформации контактных поверхностей, вовлечении сжимающих тел в пластическое деформирование. Во-вторых, вид модели зависит от введения ограничений на классы функций, в которых ищется решение [2]. Последнее позволяет упростить математическую модель и доопределить обратную граничную задачу. Экспериментально обоснованным ограничением деформационного типа является известная гипотеза плоских сечений [2–5]

$$v_y = W(y). \tag{1}$$

Здесь v_y – скорость перемещения точки слоя в его поперечном направлении. Упомянутые ограничения обычно распространяются на часть слоя (которая для толстых слоев может и отсутствовать), не включающую окрестности свободных поверхностей. Около свободных поверхностей напряженно-деформированное состояние слоя определяется на основе решения задачи Коши для нелинейной системы уравнений в частных производных гиперболического типа методом характеристик [2, 6]. В работах [2–6] рассмотрен процесс поперечного растяжения слоя. Сжатие со скольжением контактных поверхностей относительно друг друга в рамках таких моделей ранее не рассматривалось. Целью данной работы является изучение напряженно-деформированного состояния пластического слоя в процессе его сжатия при наличии скольжения между плоскими контактными поверхностями. Когда слой достаточно тонкий или становится таким в процессе сжатия, применяется гипотеза (1). Полученные, явные и неявные, аналитические зависимости позволяют находить все механические и геометрические параметры процесса либо в виде явных приближенных формул, либо на основе итерационных вычислительных схем.

Напряженно-деформированное состояние пластической среды при плоской деформации в безразмерных переменных задается системой уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\partial \upsilon_x/\partial x - \partial \upsilon_y/\partial y}{\partial \upsilon_x/\partial y + \partial \upsilon_y/\partial x}. \tag{5}$$

Здесь σ_x, σ_y и τ_{xy} – напряжения, υ_x, υ_y – скорости перемещений. Функции из уравнений (2) – (5) определены на сечении слоя толщиной $2\varkappa$, $\varkappa \in (0;1]; \varkappa = h/l$, h и l – толщина (высота) и ширина (по контактной поверхности) пластического слоя с двумя осями симметрии (осями координат). Обозначим

$$Y(y) = 0,5W''(y)/W'(y). \tag{6}$$

Из (1), (3), (5) и (6) следует:

$$\tau_{xy} = \frac{Y(y)x}{\sqrt{1 + Y^2(y)x^2}}; \quad |\sigma_x - \sigma_y| = \frac{2}{\sqrt{1 + Y^2(y)x^2}}. \tag{7}$$

В работах [2, глава 3; 3] показано, что функцию Y можно приближенно найти как решение уравнения $Y'' + 4YY' = 0$ при начальных условиях $Y(0) = 0$, $Y'(0) = -a^2/2$:

$$Y(y) = -(a/2)\,\mathrm{tg}(ay). \tag{8}$$

Параметрами математической модели являются: 1) толщина слоя h, которая рассматривается как условное время; 2) длина слоя l; относительная толщина слоя $\varkappa = h/l$; 3) скорость сжатия (движения контактной поверхности к срединной плоскости слоя) $\nu_h = |W(h)|$; 4) параметр a, который характеризует возникающий в процессе деформирования прогиб поперечных (по слою) координатных линий; 5) $m = \max \tau_{xy}(x, h)$ – наибольшее значение касательных напряжений; оно достигается на контактной поверхности всюду на некотором промежутке $[x^*; l]$, причем на этом участке касательные напряжения постоянны [2, гл. 3]; 6) ближайшая к поперечной оси симметрии слоя точка x^*, в которой касательные напряжения достигают наибольшего значения m; в работе [2, с. 83] показано, что

$$x^*/l = 1 - 2\varkappa/(\cos\omega + \sin\omega) = 1 - 2\varkappa/\sqrt{1 + m}, \tag{9}$$

где ω – угол поворота характеристики от свободной до контактной поверхности; формула (9) имеет место, когда вычисляемая по ней величина $x^* > 0$ (например, если $\varkappa < 0,5$); 7) коэффициент трения μ; условием скольжения предполагается равенство

$$m = \mu|\sigma_y(x, h)|, \ \ x \in [x^*; l]. \tag{10}$$

Параметры a, m и x^* являются внутренними и вычисляются через внешние параметры.

Известно [2, с. 70], что при $x \in [x^*; l]$

$$m = |\tau_{xy}(x, h)| = \sin(2\omega), \ \ |\sigma_y(x, h)| = 1 + 2\omega + \cos(2\omega). \tag{11}$$

В начальный момент нагружения поле характеристик является простым однородным, всюду в слое $|\sigma_y| = 2$, $\tau_{xy} = 0$, $\omega = 0$. Затем трение контактных поверхностей приводит к возникновению ненулевых касательных напряжений в слое и, как следствие, возникновению так называемого контактного упрочнения. В поле характеристик появляется участок центрированного поля (то есть сектор) с вершиной в особой точке – точке выхода контактной границы на свободную. Угол этого сектора ω увеличивается, пока не достигнет своего наибольшего значения ω^*, определяемого коэффициентом трения μ. В дальнейшем, в процессе деформирования величина ω^* остается неизменной. Из (10) и (11) следует трансцендетное уравнение для вычисления ω^*:

$$\sin(2\omega) = \mu(1 + 2\omega + \cos(2\omega)). \tag{12}$$

Из (11) следует, что наибольшие (по всем точкам слоя) значения касательных и нормальных напряжений остаются инвариантными в процессе деформирования. Для возникновения внутри слоя зоны, к которой можно применить гипотезу (1), необходимо, чтобы ввычисляемая по формуле (9) величина $x^* > 0$, что равносильно условию

$$\varkappa < \sin\omega + \cos\omega. \tag{13}$$

С момента, когда начинает выполняться условие (13), начинается второй этап деформирования слоя. Так как, в силу (7), (8) и (11),

$$\sin(2\omega^*) = -\frac{ax^* \operatorname{tg}(ah)}{\sqrt{4 + a^2(x^*)^2 \operatorname{tg}^2(ah)}}, \tag{14}$$

из (14) следует трансцендентное уравнение для нахождения параметра a:

$$ax^* \operatorname{tg}(ah) = 2\operatorname{tg}(2\omega). \tag{15}$$

Запишем это уравнение в другой форме. Пусть Ψ – функция, обратная к функции $y = x \operatorname{tg} x,\ x \in [0; \pi/2)$. Тогда уравнение (15) равносильно уравнению

$$a = \frac{1}{h}\Psi(\frac{2h \operatorname{tg}(2\omega)}{x^*}).$$

Здесь x^* вычисляется по формуле (9), ω находится решением уравнения (12). Из (6) и (8) следует уравнение для вычисления функции W:

$$0,5W''(y)/W'(y) = -(a/2)\operatorname{tg}(ay). \tag{16}$$

Учитывая очевидное условие $\nu_y|_{y=0} = 0$, получим зависимость величины скорости деформации в каждой точке от ее ординаты слоя в направлении внешнего усилия:

$$\nu_y = -\nu_h \sin(ay)/\sin(ah). \tag{17}$$

Из гипотезы (1), условия несжимаемости (5) и следующего из симметрии условия $\nu_x|_{x=0} = 0$ можно получить скорость деформации точек слоя в направлении, ортогональном внешнему усилию:

$$\nu_x = -\nu_h a x \cos(ay)/\sin(ah). \tag{18}$$

Линии тока являются интегральными кривыми уравнения $dy/dx = \nu_y/\nu_x$. Подставляя сюда правые части уравнений (17) и (18) и интегрируя, получим уравнение линии тока, проходящей через точку $(x_0; y_0)$: $x\sin(ay) = x_0 \sin(ay_0)$.

Решением обратной граничной задачи на участке контактной границы при $x \in [0; x^*]$ является функция для вычисления напряжений σ_y:

$$\sigma_y = \frac{2a^2y^2}{\cos^2(ax)\sqrt{4 + a^2y^2 \operatorname{tg}^2(ax)}(\sqrt{4 + a^2y^2 \operatorname{tg}^2(ax)} + 2)} + \frac{1}{2}\ln|\cos(ax)| + 2 + c.$$

Для ее получения следует проинтегрировать уравнения (2), используя формулы (7) и (8). Постоянную интегрирования c можно найти, приравняв полученную функцию второму выражению в (11) при $x = x^*$.

Чтобы получить результаты в приближенной аналитической форме, следует найти явные аналитические зависимости для параметров ω и a, которые в неявной форме заданы уравнениями (12) и (15). Например, приближенное решение уравнения (15) можно получить, используя следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. *Функцию* Ψ *можно представить в виде* $\Psi(x) = \sqrt{x\psi(-x)}$, *где функция* ψ *аналитична на всей числовой прямой, причем*

$$\psi(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{45}x^2 + \frac{16}{945}x^3 + \frac{256}{127575}x^4 + ...$$

Т е о р е м а 2. *Функцию* Ψ *можно представить в виде* $\Psi(x) = \varphi(1/x)$, *где функция* φ *аналитична в интервале (− 1;1), причем*

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2}\left(1 - t + t^2 - (1 - \frac{\pi^2}{12})t^3 + ...\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прандтль Л.* Примеры применения теоремы Г. Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности / под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Издательство иностр. литературы, 1948. С. 102-113.
2. *Дильман В.Л., Ерошкина Т.В.* Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях. Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2011. 276 с.
3. *Дильман В.Л., Остсемин А.А.* Напряженное состояние и статическая прочность пластичной прослойки при плоской деформации // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 4. С. 38-48.
4. *Дильман В.Л.* О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 6. С. 115-124.
5. *Дильман В.Л., Носачева А.И.* Математическое моделирование критических состояний пластического слоя // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2502-2504.
6. *Дильман В.Л.* Напряженное состояние и прочность неоднородной пла-стической полосы с дефектом в более прочной части // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 2. С. 89-102.

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Dilman V.L., Dheyab A.N. ON THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE PLASTIC LAYER DEFORMATION UNDER ITS COMPRESSION WITH SLIDE

The stress-strain state of a plastic layer in the process of compression with slide between flat contact surfaces in a plane strain is under consideration. The obtained analytical dependences allow to find out all the mechanical and geometrical parameters of the process, either in the form of explicit approximate formulas or on the basis of iterative computational schemes.

Key words: plastic layer; plane strain; sediment; stress-strain state; the hypothesis of plane sections; streamlines; inverse boundary problem; the system of equations hyperbolic type.

Дильман Валерий Лейзерович, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики, e-mail: dilman49@mail.ru

Dilman Valery Lazerovich, South-Ural State University, Chelyabinsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, the Head of the Applied Mathematics Department, e-mail: dilman49@mail.ru

Дияб Аус Нидал, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, аспирант кафедры прикладной математики, e-mail: Aws.nth@gmail.com

Dheyab Aws Nidhal, South-Ural State University, Chelyabinsk, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Applied Mathematics Department, e-mail: Aws.nth@gmail.com

УДК 517.958

КЛАССИФИКАЦИЯ КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ НЕОДНОРОДНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ НА ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© **В.Л. Дильман, Д.А. Трунова**

Ключевые слова: неоднородный пластический слой; напряженное состояние; гипотеза разделения переменных; системы нелинейных уравнений в частных производных; функциональное уравнение.

Исследуется краевая задача для системы нелинейных уравнений в частных производных, моделирующая напряженное состояние неоднородного пластического слоя. Слой находится под растягивающей нагрузкой в условиях плоской деформации. В предположении разделения переменных для касательных напряжений задача сведена к некоторым нелинейным системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Сведение основано на полученной в работе полной классификации решений некоторого чисто функционального уравнения.

Рассматривается математическая модель напряженного состояния неоднородного пластического слоя. Пластически деформируемые слои возникают при нагружении сварных соединений (сварные швы, зоны термического влияния, диффузионные прослойки) и при осадке заготовок жесткими матрицами. В работе предполагается что слой имеет прямоугольную форму, расположен между жесткими участками соединения и находится под сжимающей или растягивающей нагрузкой в условиях плоской деформации. Цель работы — разработка вычислительной схемы нахождения напряженного состояния слоя в критический момент нагружения, а также получение в аналитической форме явных зависимостей напряжений от координат для некоторых характерных частных случаев.

Расположим оси координат по осям симметрии слоя $[-1;1]\times[-\varkappa;\varkappa]$, здесь $0<\varkappa<1$ — толщина слоя. Математическая модель содержит систему нелинейных уравнений «пластического равновесия» гиперболического типа [1–5]:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0,\ \ (\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4Z^2. \tag{1}$$

Условие на свободной границе Γ в форме Сен-Венана:

$$\int_\Gamma \sigma_x dy=0. \tag{2}$$

Неоднородность слоя определим функцией

$$Z(x,y)=U(x)V(y), \tag{3}$$

дифференцируемой по каждой переменной.