БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках реализации государственного задания министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности (код проекта 1.333.2014/K), при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект № МК-5333.2015.1.) и гранта РФФИ (проект № 14-01-31185).

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Zhukovskiy S.E., Sengupta R. ON THE CONVEXITY OF QUADRATIC MAPPINGS IMAGES

In the paper, the question on convexity of quadratic mappings images is discussed. The conditions for a restriction of a quadratic mapping to a closed convex cone to be surjective are obtained.

Key words: quadratic mapping; convex cone.

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Zhukovskiy Sergey Evgenyevich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Сенгупта Ричик, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, студент, e-mail: veryricheek@hotmail.com

Sengupta Richik, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Student, e-mail: veryricheek@hotmail.com

УДК 517.962.24 + 517.929.9

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© И.А. Забродский, А.С. Кузякина

Ключевые слова: разностное уравнение неявного вида; устойчивость положения равновесия; экспоненциальная устойчивость; накрывающие отображения метрических пространств.

Рассмотрено разностное уравнение неявного вида в произвольном метрическом пространстве. Предложено понятие частичной экспоненциальной устойчивости. Получены условия такой устойчивости. Исследование основано на результатах о накрывающих отображениях, действующих в метрических пространствах.

Разностными уравнениями моделируются многие процессы в биологии, экономике, технике. Разностные уравнения используются в приближенных методах решения интегральных, дифференциальных, функциональных уравнений. Одна из основных задач исследования разностных уравнений состоит в определении устойчивости положения равновесия. Эта задача подробно изучена для автономных разностных уравнений явного вида

$$x_{n+1} = F(x_n),$$

где $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (см., например, [1]).

В данной работе исследуется проблема устойчивости автономных разностных уравнений неявного вида, причем под x_n понимается не только вектор из $\mathbb{R}^n$, но и, возможно, элемент произвольного метрического пространства.

Пусть X, Y – метрические пространства, $\rho_X(\cdot,\cdot), \rho_Y(\cdot,\cdot)$ – расстояние между точками в соответствующих метрических пространствах, задано отображение $\Upsilon : X \times X \longrightarrow Y$ и элемент $y \in Y.$ Рассмотрим разностное уравнение

$$\Upsilon(x_{n+1}, x_n) = y. \tag{1}$$

Решением разностного уравнения (1) называется последовательность $\{x_n\} \subset X$, элементы которой удовлетворяют (1) при любом $n = 0, 1, 2, \dots$. Решение разностного уравнения (1), являющееся постоянной последовательностью, т.е. $x_n = u$, при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, называется положением равновесия.

О п р е д е л е н и е 1. Положение равновесия u уравнения (1) назовем *частично экспоненциально устойчивым*, если найдется $\lambda > 0$, и для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такие, что при любом $A \in X$ из неравенства $\rho_X(u, A) < \delta_\varepsilon$ следует существование решения $\{x_n\}$ уравнения (1), отвечающего условиям: $x_0 = A$, $\rho_X(x_n, u) < \varepsilon\ e^{-\lambda n}$ (при всех $n \in \mathbb{N}$).

Выясним, каким требованиям должно удовлетворять отображение Υ для того, чтобы положение равновесия уравнения (1) было частично экспоненциально устойчивым. Наше исследование основано на результатах [2–4] о накрывающих отображениях.

Пусть $B_X(u, r) = \{x \in X : \rho_X(u, x) \leqslant r\}$ – замкнутый шар с центром в u радиуса $r \geqslant 0$ в метрическом пространстве X.

О п р е д е л е н и е 2 [2]. Отображение $F : X \to Y$ называется α*-накрывающим*, $\alpha > 0$, если для любого $r \geqslant 0$, и любого $x \in X$ справедливо

$$F(B_X(r, x)) \supseteq B_Y(\alpha r, F(x)).$$

Напомним, что отображение $F : X \to Y$ называется β-липшицевым, $\beta \geqslant 0$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено неравенство

$$\rho_Y(F(x_1), F(x_2)) \leqslant \beta \rho_X(x_1, x_2).$$

Наряду с уравнением (1), для нахождения положения равновесия, будем рассматривать уравнение

$$\Upsilon(x, x) = y \tag{2}$$

относительно элемента $x \in X.$

Л е м м а 1. *Пусть отображение $\Upsilon(\cdot, x_2) : X \to Y$ является непрерывным для любого $x_2 \in X$, а отображение $\Upsilon(x_1, \cdot) : X \to Y$ – β-липшицевым для любого $x_1 \in X$. Тогда, отображение $F : X \to Y,\ F(x) \doteq \Upsilon(x, x)$ является непрерывным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и произвольный $x_2 \in X.$ Отображение $\Upsilon(\cdot, x_2) : X \to Y$ непрерывно в точке x_2. Следовательно, существует $\delta > 0$, такое, что для любого $x_1,$ удовлетворяющего оценке $\rho_X(x_1, x_2) < \delta$ выполнено

$$\rho_Y(\Upsilon(x_1, x_2), \Upsilon_Y(x_2, x_2)) < \frac{\varepsilon}{1 + \beta}.$$

Без ограничения общности можем считать, что $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\beta}.$ Теперь, вследствие липшицевости отображения $\Upsilon(x_1, \cdot)$ имеем

$$\rho_Y(\Upsilon(x_1, x_1), \Upsilon(x_1, x_2) < \beta \rho_X(x_1, x_2) < \beta\delta \leqslant \frac{\beta\varepsilon}{1 + \beta}.$$

Таким образом,

$$\rho_Y(\Upsilon(x_1,x_1),\Upsilon(x_2,x_2)) \leqslant \rho_Y(\Upsilon(x_1,x_1),\Upsilon(x_1,x_2)) + \rho_Y(\Upsilon(x_1,x_2),\Upsilon(x_2,x_2)) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{1+\beta} + \frac{\beta\varepsilon}{1+\beta} \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 1 [3]. *Пусть пространство* X *– полно; отображение* $\Upsilon(\cdot,x_2) : X \to Y$ *является* α*-накрывающим и непрерывным для любого* $x_2 \in X$*, а отображение* $\Upsilon(x_1,\cdot) : X \to Y$ *–* β*-липшицевым для любого* $x_1 \in X$.

Тогда, если $\alpha > \beta$*, то для любого* $x_0 \in X$ *существует последовательность* $\{x_n\} \subset X$*, являющаяся решением уравнения (1); эта последовательность сходится*

$$\rho_X(x_n,\hat{x}) \to 0 \ (n \to \infty),$$

причем $\hat{x}$ *является решением уравнения* (2) *и удовлетворяет оценке*

$$\rho_X(\hat{x},x_0) \leqslant \frac{1}{\alpha-\beta}\rho_Y(\Upsilon(\hat{x},\hat{x}),\Upsilon(x_0,x_0)).$$

Теорема 1 доказана в работе [3] и, в более общем виде, в работе [4]. Мы приведем полное доказательство, поскольку далее будем использовать не только сформулированный результат, но и некоторые оценки, полученные при доказательстве.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольный элемент $x_0 \in X$. Найдем $y_0 \doteq \Upsilon(x_0,x_0)$. Так как отображение Υ является α-накрывающим по первому аргументу, то существует $x_1 \in X$ такой, что

$$\Upsilon(x_1,x_0) = y, \quad \rho_X(x_1,x_0) \leqslant \frac{1}{\alpha}\rho_Y(y,y_0). \tag{3}$$

Вследствие того, что отображение Υ β-липшицево по второму аргументу, получаем

$$\rho_Y(y,y_1) \leqslant \beta\rho_X(x_0,x_1), \ y_1 \doteq \Upsilon(x_1,x_1).$$

Далее, пусть существует $x_k \in X$ такой, что

$$\Upsilon(x_k,x_{k-1}) = y, \quad \rho_X(x_k,x_{k-1}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\rho_Y(y,y_{k-1}) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\rho_X(x_{k-2},x_{k-1}), \ y_{k-1} \doteq \Upsilon(x_{k-1},x_{k-1})$$

Тогда для $y_k \doteq \Upsilon(x_k,x_k)$ имеем

$$\rho_Y(y,y_k) = \rho(\Upsilon(x_k,x_{k-1},\Upsilon(x_k,x_k)) \leqslant \beta\rho_X(x_{k-1},x_k).$$

Далее из свойства α-накрывания отображения $\Upsilon(\cdot,x_k)$ получаем, что существует $x_{k+1} \in X$ удовлетворяющий соотношениям:

$$\Upsilon(x_{k+1},x_k) = y, \quad \rho_X(x_{k+1},x_k) \leqslant \frac{1}{\alpha}\rho_Y(y,y_k) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\rho_X(x_{k-1},x_k).$$

Итак, по индукции построена последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\Upsilon(x_{n+1},x_n) = y, \quad \rho_X(x_{n+1},n_k) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\rho_X(x_{n-2},x_{n-1}), \ n = 0,1,2,\ldots \,. \tag{4}$$

Используя формулу суммы убывающей геометрической прогрессии, при любом n получаем:

$$\rho_X(x_n,x_0) \leqslant \rho_X(x_n,x_{n-1}) + \ldots + \rho_X(x_1,x_0) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\rho_X(x_1,x_0) \leqslant \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\rho_Y(y,y_0).$$

Итак,

$$\rho_X(x_n,x_0) \leqslant \frac{1}{\alpha-\beta}\rho_Y(y,y_0),\ n=0,1,2,\dots\ . \tag{5}$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Возьмем номера k и m такие, что $m \geqslant k$. Дадим оценку $\rho_X(x_k,x_m)$. Из неравенства треугольника имеем:

$$\rho_X(x_k,x_m) \leqslant \rho_X(x_k,x_{k+1}) + \rho_X(x_{k+1},x_{k+2}) + \dots + \rho_X(x_{m-1},x_m).$$

Учитывая, что $\rho_X(x_n,x_{n+1}) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\rho_X(x_{n-1},x_n) \leqslant \dots \leqslant (\frac{\beta}{\alpha})^n\rho_X(x_0,x_1)$, получаем

$$\rho_X(x_k,x_m) \leqslant \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^k\rho_X(x_0,x_1) + \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k+1}\rho_X(x_0,x_1) + \dots + \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{m-1}\rho_X(x_0,x_1) =$$
$$= \rho_X(x_0,x_1)\Big(\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^k + \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{k+1} + \dots + \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{m-1}\Big) = \rho_X(x_0,x_1)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^k\Big(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \dots + \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{m-k-1}\Big)$$
$$\leqslant \rho_X(x_0,x_1)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^k\frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \rho_X(x_0,x_1)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^k\frac{\alpha}{\alpha-\beta}.$$

Итак,

$$\rho_X(x_k,x_m) \leqslant \rho_X(x_0,x_1)\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^k\frac{\alpha}{\alpha-\beta}. \tag{6}$$

Так как $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$, то $(\frac{\beta}{\alpha})^k \to 0$, при $k \to \infty$, поэтому, $\rho_X(x_k,x_m) \to 0$, при $k \to \infty$. Т. о. последовательность $\{x_k\}$ является фундаментальной. Обозначим ее предел через $\hat{x}$. Воспользовавшись Леммой 1, получим $\Upsilon(\hat{x},\hat{x}) = y$. Так как при переходе к пределу знак неравенства сохраняется, то из (5) следует:

$$\rho_X(\hat{x},x_0) \leqslant \frac{1}{\alpha-\beta}\rho_Y(y,y_0).$$

Теорема доказана.

Решение u уравнения (2) называют изолированным, если существует $\delta_0 > 0$, такое, что $\Upsilon(x,x) \neq y$, для любого $x \in B_X(u,\delta_0)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, и пусть u – изолированное решение уравнения (2). Тогда, положение равновесия $x_n = u$ $(n = 0,1,2,\dots)$ уравнения (1) будет частично экспоненциально устойчивым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что для любого начального значения x_0 из некоторой окрестности точки u существует решение $\{x_n\}$ разностного уравнения (1), сходящееся к u. Пусть в δ_0-окрестности точки u уравнение (2) не имеет решений, отличных от u. В силу непрерывности в точке u функции $F: X \to Y$, $F(x) = \Upsilon(x,x)$ существует $\delta \in (0,\frac{\delta_0}{2})$ такое, что для любого $x_0 \in B_X(u,\delta)$ выполнено $\rho_Y(\Upsilon(x_0,x_0),\Upsilon(u,u)) < \frac{\delta_0}{2}(\alpha-\beta)$. Согласно Теореме 1 для x_0 можно построить последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к некоторому $\hat{x}$, причем справедлива оценка

$$\rho_X(x_0,\hat{x}) \leqslant \frac{1}{\alpha-\beta}\rho_Y(\Upsilon(x_0,x_0),\Upsilon(u,u)) < \frac{\delta_0}{2}.$$

Тогда, $\rho_X(u,\hat{x}) < \rho_X(u,x_0) + \rho_X(x_0,\hat{x}) < \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} < \delta_0$. Так как решение u – изолированное, то $\hat{x} = u$.

Кроме того, это положение равновесия будет частично экспоненциально устойчивым. Действительно, воспользовавшись неравенствами (3),(6) получим

$$\rho_X(x_k,u) \leqslant \rho_Y(\Upsilon(x_0,x_0),\Upsilon(u,u))\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{-k}\frac{1}{\alpha-\beta}.$$

Из непрерывности функции $\Upsilon(\cdot,\cdot)$ в точке u следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого x_0 удовлетворяющего неравенству $\rho_X(x_0, u) < \delta$ выполнено $\rho_Y(\Upsilon(x_0, x_0), \Upsilon(u, u)) < \varepsilon(\alpha - \beta)$. Тогда

$$\rho_X(x_k, u) \leqslant \varepsilon\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{-k} = \varepsilon e^{-k \ln \frac{\alpha}{\beta}} = \varepsilon e^{-\lambda k}, \quad \lambda = \ln \frac{\alpha}{\beta} > 0.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что идея приложения результатов о накрывающих отображениях к исследованию разностных уравнений предложена в [5], [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романко В.К.* Разностные уравнения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 112 с.

2. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151-155.

3. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613-634.

4. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523-1537.

5. *Arutyunov A., Pereira F., Zhukovskiy S.* Solvability of Implicit Difference Equations // CONTROLO'2014. Proceedings of the 11th Portuguese Conference on Automatic Control. Lecture Notes in Electrical Engineering. 2015. V. 321. P. 23–28.

6. *Жуковский С.Е.* Приложение накрывающих отображений к разностным уравнениям // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1085–1086.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-01-00877).

Поступила в редакцию 12 июня 2015 г.

Zabrodskii I.A., Kuzyakina A.S. EXPONENTIAL STABILITY OF IMPLICIT DIFFERENCE EQUATIONS

An implicit difference equation in an arbitrary metric space is considered. The concept of partial exponential stability is introduced. The stability conditions are found. The study is based on the results about covering mapping of metric spaces.

Key words: implicit difference equation; stability of equilibrium position; exponential stability; covering mapping of metric spaces.

Забродский Илья Алексеевич, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: ilyatmb@yandex.ru

Zabrodskii Ilia Alekseevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Algebra and Geometry Department, e-mail: ilyatmb@yandex.ru

Кузякина Александра Сергеевна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, магистрант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: 79004912641@mail.ru

Kuzakina Aleksandra Sergeevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, thr Russian Federation, Master's degree Student of the Algebra and Geometry Department, e-mail: 79004912641@mail.ru