УДК 517.977.5, 517.929.7, 519.62

ОДИН МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© **Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, Е. А. Молоканова**

Ключевые слова: оптимальное управление; линейное функционально-дифференциальное уравнение; общее решение; функция Коши; приближенное решение.

Предлагается метод приближенного решения задачи оптимального управления для линейного функционально-дифференциального уравнения, основанный на представлении общего решения с помощью функции Коши. Аппроксимация функции Коши позволяет свести задачу оптимального управления к задаче линейного программирования.

Обозначим E_n — единичную $n\times n$-матрицу, $\mathbb{R}^n$ — вещественное n-мерное пространство с нормой $|\cdot|$; $L^n = L([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство измеримых суммируемых функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n}=\int_a^b|x(t)|\,dt$; $L^n_\infty = L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n_\infty}=\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|x(t)|$; $AC^n = AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих производную $\dot x\in L^n$, с нормой $\|x\|_{AC^n}=|x(a)|+\|\dot x\|_{L^n}$.

Пусть U^m — некоторое банахово пространство измеримых функций $u:[a,b]\to\mathbb{R}^m$. Пусть заданы: функции $U_*,U^*\in U^m$, удовлетворяющие неравенству $U_*(t)\le U^*(t)$ почти всюду на $[a,b]$, линейный ограниченный оператор $H:U^m\to L^n$, линейный ограниченный вольтерров оператор $G:AC^n\to L^n$ линейные ограниченные функционалы $l:AC^n\to\mathbb{R}^p$, $\varphi:AC^n\to\mathbb{R}$ и векторы $\alpha\in\mathbb{R}^n$, $\beta\in\mathbb{R}^p$. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \dot x(t)-(Gx)(t)=(Hu)(t), & t\in[a,b],\\ U_*(t)\le u(t)\le U^*(t), & t\in[a,b],\\ x(a)=\alpha,\quad lx=\beta, \end{cases} \tag{1}$$

$$\varphi x\to\min. \tag{2}$$

При естественных предположениях на оператор $G:AC^n\to L^n$ для функционально-дифференциального уравнения

$$\dot x - Gx = y \tag{3}$$

при любом $y\in L^n$ однозначно разрешима задача Коши с условием

$$x(a)=\alpha, \tag{4}$$

и ее решение представимо в виде (см. [1, с. 83, 84])

$$x(t)=X(t)\alpha+\int_a^t \mathcal{C}(t,s)y(s)\,ds, \tag{5}$$

где $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$ — функция (матрица) Коши; X — фундаментальная матрица решений соответствующего однородного уравнения, т.е. матрица, столбцы которой $X_i \in AC^n$ удовлетворяют соотношению $\dot{X}_i - GX_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, и выполнено $X(a) = E_n$. Важно, что фундаментальную систему решений можно определить по функции Коши, т. к. справедливо соотношение

$$X(t) = e_n(t) + \int\limits_a^t \mathcal{C}(t,s)(Ge_n)(s)\,ds,$$

где функция-константа $e_n(t) = E_n$, $t \in [a,b]$.

Определим оператор $C : L^p \to AC^p$ равенством

$$(Cy)(t) = X(t)\alpha + \int_a^t \mathcal{C}(t,s)y(s)\,ds \quad t \in [a,b].$$

Таким образом, согласно (5), решением задачи Коши для уравнения (3) является $x = Cy$. Соотношение (5) позволяет записать задачу оптимального управления (1),(2) в виде экстремальной задачи

$$\begin{cases} U_*(t) \le u(t) \le U^*(t), & t \in [a,b], \\ lCHu = \beta, \end{cases} \tag{6}$$

$$\varphi CHu \to \min, \tag{7}$$

относительно неизвестного управления $u \in U^m$.

Для приближенного решения полученной задачи (6),(7) можно воспользоваться аппроксимацией функции $u \in U^m$ функцией $\mathrm{P}\Pi u \in U^m$, где отображения $\Pi : U^m \to \mathbb{R}^k$, $\mathrm{P} : \mathbb{R}^k \to U^m$ являются линейными, ограниченными, монотонными и их композиция $\Pi\mathrm{P} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ является тождественным оператором. Например, если $U^m \subset L^m$, то можно положить

$$u \in U^m \mapsto \Pi u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k, \text{ где } u_j = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{a+(j-1)\Delta}^{a+j\Delta} u(t)\,dt, \quad \Delta = \frac{b-a}{k}, \quad j = \overline{1,k};$$

$$\bar{u} = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k \mapsto \mathrm{P}\bar{u} \in U^m, \ (\mathrm{P}\bar{u})(t) = u_j, \quad t \in [a + (j-1)\Delta,\, a + j\Delta), \quad j = \overline{1,k}.$$

Аппроксимация решения $u \in U^m$ задачи (6),(7) функцией $\mathrm{P}\bar{u}$ сводит эту задачу к задаче

$$\begin{cases} \Pi U_* \le \bar{u} \le \Pi U^*, \\ lCH\mathrm{P}\bar{u} = \beta, \end{cases}$$

$$\varphi CH\mathrm{P}\bar{u} \to \min.$$

относительно неизвестного $\bar{u} \in \mathbb{R}^k$. Здесь $\Pi U_*, \Pi U^* \in \mathbb{R}^k$, $lCH\mathrm{P} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $\varphi CH\mathrm{P} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Полученная задача линейного программирования решается известными методами (см., например, книгу [2]).

Таким образом, нахождение приближенного решения задачи оптимального управления для функционально-дифференциального уравнения сводится к решению классической задачи линейного программирования.

Для применения описанной схемы необходимы методы нахождения функции Коши функционально-дифференциального уравнения (3). Однако приближенному построению функции Коши конкретных типов функционально-дифференциальных уравнений посвящено небольшое число работ. Н.В. Азбелев отмечал важность создания таких методов для исследования реакций систем на многочисленные различные входные сигналы, начальные условия и управляющие воздействия. Подобные задачи требуют многократного решения уравнений, отличающихся лишь начальными условиями и правыми частями. В этом случае удобнее найти функцию Коши и затем в общее решение (5) подставлять различные функции y и векторы α. Таким образом, вместо решения при каждых y, α уравнения (3) остается просто вычислить интеграл в (5). Эта идея позволяет решить актуальную техническую задачу управления летательными аппаратами, которая требуют для сложных систем уравнений "быстрых" алгоритмов. Вычисленная заранее функция Коши позволяет производить расчеты в необходимые для эффективного управления малые промежутки времени. Поэтому функцию Коши Н.В. Азбелев образно называл "оператором в чемодане". Эту же идею мы применили выше для упрощения задачи оптимального управления.

В предлагаемом методе решения задачи (1),(2) для приближенного нахождения функции Коши скалярного функционально-дифференциального уравнения будем использовать алгоритм, разработанный в [3].

Рассмотрим скалярное функционально-дифференциальное уравнение (3) (т. е. $n = 1$) в предположении вольтерровости оператора $G : AC \to L$. Вследствие изоморфизма пространств AC, $L \times \mathbb{R}$, определяемого соотношением

$$x \in AC \mapsto (\dot{x}, x(a)) \in L \times \mathbb{R}, \quad (y, \alpha) \in L \times \mathbb{R} \mapsto x(\cdot) = \alpha + \int\limits_a^{(\cdot)} y(s)\, ds \in AC,$$

уравнение (3) записывается в виде

$$\dot{x} - W\dot{x} - Ax(a) = y, \tag{8}$$

где $W : L \to L$, $Wy = G\Big(\int_a^{(\cdot)} y(s)\, ds\Big)$; $A \in L$, $A = G(\mathbf{1})$ (символом $\mathbf{1}$ обозначена постоянная функция $\mathbf{1}(t) = 1$, $t \in [a, b]$).

Из вольтерровости оператора $G : AC \to L$ следует, что оператор $W : L \to L$ также является вольтерровым. Если спектральный радиус оператора W меньше 1, то задача Коши для уравнения (8) (соответственно, равносильного уравнения (3)) однозначно разрешима и ее решение определяется равенством (5).

Опишем метод приближенного построения функции Коши уравнения (3).

Выберем некоторое натуральное N и действительные числа t_j, $j = \overline{1, N}$, удовлетворяющие неравенствам $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$. Пусть заданы функции $H_j \in L$, $j = \overline{1, N}$, такие что $H_j(t) = 0$ при п.в. $t \in [a, t_{j-1}]$. Определим $N \times N$ матрицы τ, g с элементами

$$\tau_{ij} = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} H_j(t)\, dt, \quad g_{ij} = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} (WH_j)(s)\, ds,$$

Заметим, что при $j > i$ выполнено $\tau_{ij} = g_{ij} = 0$.

Если предположить, что $\tau_{i\,i} \neq 0$ при любом i, то матрица τ обратима, обозначим $\eta = \tau^{-1}$. Для элементов этой матрицы при $j > i$ выполнено $\eta_{ij} = 0$. Определим $\sigma = g\eta$. Определим отображение $\mathcal{P} : L \to L$, ставящее в соответствие каждому $y \in L$ элемент

$$\mathcal{P}y = \sum_{j=1}^{N} \xi_j H_j$$

такой, что справедливо соотношение

$$\int\limits_a^{t_i} y(s)\, ds = \int\limits_a^{t_i} (\mathcal{P}y)(s)\, ds, \quad i = \overline{1, N}.$$

Исходя из последнего условия, найдем коэффициенты $\xi_j, \quad j = \overline{1, N}$.

Положим $x_i = \int_a^{t_i} y(s)\,ds$. Тогда

$$\int\limits_a^{t_i} \sum_{j=1}^{N} \xi_j H_j(s)\,ds - \int\limits_a^{t_{i-1}} \sum_{j=1}^{N} \xi_j H_j(s)\,ds = \sum_{j=1}^{i} \xi_j \tau_{ij} = x_i - x_{i-1}.$$

Следовательно, $\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \eta_{ij}(x_j - x_{j-1})$ и

$$\mathcal{P}y = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} \eta_{ij}(x_j - x_{j-1}) H_i.$$

Метод состоит в замене исходного уравнения (3) "приближенным"

$$\dot{x} - W\mathcal{P}\dot{x} - Ax(a) = y,$$

функция Коши которого определяется следующими рекуррентными соотношениями

$$C(t_1, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \eta_{11} g_{11}} & \text{при } s \in [a, t_1], \\ 0 & \text{при } s \notin [a, t_1], \end{cases}$$

$$C(t_i, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \eta_{ii} g_{ii}} \Big(1 + \sum\limits_{j=1}^{i-1} C(t_j, s)(\sigma_{ij} - \sigma_{ij+1}) \Big) & \text{при } s \in [a, t_i], \\ 0 & \text{при } s \notin [a, t_i], \end{cases} \qquad i = \overline{2, N}.$$

Если положить $H_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [a, t_{j-1}], \\ 1, & \text{если } t \in [t_{j-1}, b], \end{cases}$ то из приведенного здесь метода получим разработанный ранее в [4] метод построения функции Коши.

Условия сходимости описанного приближенного метода приведены в [3].

В заключение отметим, что для редукции задачи оптимального управления (1),(2) к экстремальной задаче можно использовать вместо задачи Коши (3), (4) краевую задачу

$$\dot{x} - Gx = y, \quad lx = \beta.$$

Если эта задача при любой правой части $y \in L^n$ однозначно разрешима, то ее решение представимо в виде (см. [1, с. 83, 84])

$$x(t) = X(t)\beta + \int\limits_a^b \mathcal{G}(t, s) y(s)\,ds,$$

где $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$ — функция (матрица) Грина. Полученное представление решения аналогично соотношению (5) позволяет заменить задачу оптимального управления (1),(2) равносильной экстремальной задачей. Для применения этой идеи требуются методы приближенного нахождения функции Грина $\mathcal{G}(t, s)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

2. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование: Теория, методы и приложения. Изд. 2. М.: URSS, 2012.

3. *Жуковская Т.В.* Интерполяция функции Коши // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2002. Т. 7. Вып. 1. С. 110–111.

4. *Жуковская Т.В.* Вольтерровость операторов и численное решение функционально-дифференциальных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1990.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00877).

Поступила в редакцию 20 января 2015 г.

Zhukovskaia T.V., Zhukovskiy E.S., Molokanova E.A. A METHOD FOR APPROXIMATE SOLVING OF AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A LINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

It is proposed a method for approximate solving of an optimal control problem for a linear functional-differential equation based on a representation of a general solution using a Cauchy function. An approximation of a Cauchy function allows to reduce the initial optimal control problem to a linear programming problem.

Key words: optimal control; linear functional-differential equation; general solution; Cauchy function; approximate solution.

Жуковская Татьяна Владимировна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, e-mail: t_ zhukovskaia@mail.ru

Zhukovskaia Tatyana Vladimirovna, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor of High Mathematics Department, e-mail: t_ zhukovskaia@mail.ru

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

Молоканова Елена Анатольевна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики, e-mail: mlknv@rambler.ru

Molokanova Elena Anatol'evna, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Candidate of Pedagogy, Head teacher of High Mathematics Department, e-mail: mlknv@rambler.ru