УДК 517.929

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

© М.В. Борзова, А.В. Козадаев, Х.М.Т. Тахир

Ключевые слова: линейные функционально-дифференциальные уравнения; дифференциальное уравнение с запаздыванием; функция Коши; общее решение.
Рассматриваются некоторые простейшие линейные функционально-дифференциальные уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах. Для этих уравнений приводится общее решение, использующее функцию Коши.

В теории и приложениях обыкновенных дифференциальных уравнений всегда важно было выделение уравнений, интегрируемых в квадратурах [1]. Безусловно, современные вычислительные средства позволяют быстро и с большой точностью решать различные уравнения, но аналитическая форма «точного» общего решения имеет несомненные преимущества перед приближенным решением и часто незаменима во многих теоретических исследованиях. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений выделению решаемых явно функционально-дифференциальных уравнений посвящено небольшое число работ, не существует справочника таких уравнений. Интегрируемые в квадратурах функционально-дифференциальные уравнения востребованы, например, в качестве модельных уравнений при исследовании краевых задач, проблем устойчивости, задачи о периодических решений, получении оценок решений (подробнее см. [2]).

Приведем примеры нахождения некоторых линейных простейших функционально-дифференциальных уравнений первого порядка.

Будем обозначать $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$; μ — меру Лебега на $\mathbb{R}_+$; L — класс функций $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, суммируемых на каждом конечном отрезке; χ_Ω — характеристическую функцию множества $\Omega \subset \mathbb{R}_+$, т. е. $\chi_\Omega(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in \Omega, \\ 0 & \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+ \setminus \Omega \end{cases}$. Под сходимостью $y_n \to y$ в пространстве L понимаем сходимость $\int_0^T |y_n(t) - y(t)|\, dt \to 0$ при каждом $T > 0$. В рассматриваемых уравнениях предполагается, что правая часть — функция f является элементом L. Решение ищется в классе AC абсолютно непрерывных функций $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, имеющих почти всюду на $\mathbb{R}_+$ производную $\dot{x} \in L$. В этом пространстве решений последовательность $\{x_n\} \subset AC$ сходится к $x \in AC$, если $\dot{x}_n \to \dot{x}$ в L и, кроме того, $x_n(0) \to x(0)$.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\dot{x}(t) - p\, x(t-1) = f(t), \quad t \geqslant 0, \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) с начальным условием $x(0) = \alpha$ находится последовательно на интервалах $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$ и т.д. Если через $x_n(t)$ обозначить решение на n-ом промежутке $(n-1, n]$, то имеет место рекуррентная формула

$$x_1(t) = \alpha + \int\limits_0^t f(s)\, ds, \quad x_n(t) = x_{n-1}(n-1) + \int\limits_{n-1}^t f(s)\, ds + p \int\limits_{n-1}^t x_{n-1}(s-1)\, ds.$$

Используя это соотношение, получаем общее решение уравнения (1):

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{[n,\infty)}(t)\Big(\frac{\alpha p^n(t-n)^n}{n!}+\int\limits_0^{t-n}\frac{p^n(t-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds\Big).$$

Таким образом, для уравнения (1) определяем функцию Коши

$$C(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n(t-s-n)^n\,\chi_{[n,\infty)}(t)\,\chi_{[0,t-n]}(s)}{n!}\,.$$

и фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения

$$X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n(t-n)^n\,\chi_{[n,\infty)}(t)}{n!} \tag{2}$$

Полученные соотношения позволяют, в частности, получать условия разрешимости краевых задач для уравнения (1). Рассмотрим, например, двухточечную краевую задачу с условием $Ax(0)+Bx(n)=C,\ \ B\neq 0$. Для однозначной разрешимости этой задачи при любых $C\in\mathbb{R},\ \ f\in L$ необходимо и достаточно [2, с. 35], чтобы фундаментальное решение однородного уравнения удовлетворяло неравенству $AX(0)+BX(n)\neq 0$. Используя (2), это неравенство запишем в виде

$$1+\frac{p(n-1)^1}{1!}+\frac{p(n-2)^2}{2!}+\ldots+\frac{p^{n-1}}{(n-1)!}\neq-\frac{A}{B}.$$

Отсюда при $A=1,\ \ B=-1$ получаем следующий критерий однозначной разрешимости периодической краевой задачи

$$\frac{p(n-1)^1}{1!}+\frac{p(n-2)^2}{2!}+\ldots+\frac{p^{n-1}}{(n-1)!}\neq 0.$$

Теперь рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с переменным запаздыванием вида

$$\dot{x}(t)-p\,x(t/2)=f(t),\quad t\geqslant 0. \tag{3}$$

Задача Коши с начальным условием $x(0)=0$ для уравнения (3) заменой $y=\dot{x}$ сводится к интегральному уравнению

$$y(t)=p\int\limits_0^{t/2}y(s)\,ds+f(t),\quad t\geqslant 0.\ \ x(\xi)=0,\ \text{если}\ \xi<0. \tag{4}$$

Так как спектральный радиус вольтеррова интегрального оператора

$$K:L\to L,\quad (Ky)(t)=p\int\limits_0^{t/2}y(s)\,ds+f(t),$$

равен нулю, то существует единственное решение уравнения (4), и это решение представимо суммой ряда Неймана

$$y(t)=f(t)+(Kf)(t)+(K^2f)(t)+\ldots.$$

Имеем

$$(K^2 f)(t) = p^2 \int\limits_0^{t/2} \int\limits_0^{s/2} f(\xi)\, d\xi\, ds = p^2 \int\limits_0^{t/4} \int\limits_{2\xi}^{t/2} f(\xi)\, ds\, d\xi = p^2 \int\limits_0^{t/4} \Big(\frac{t}{2} - 2\xi\Big) f(\xi)\, d\xi.$$

Аналогичными вычислениями по индукции устанавливаем

$$(K^n f)(t) = p^n \int\limits_0^{t/2^n} \frac{2^0 2^1 \dots 2^{n-2}}{(n-1)!} \Big(\frac{t}{2^{n-1}} - 2\xi\Big)^{n-1} f(\xi)\, d\xi.$$

Таким образом

$$x(t) = \int\limits_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f)(s)\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^t (K^n f)(s)\, ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \int\limits_0^t \int\limits_0^{s/2^n} \frac{2^0 2^1 \dots 2^{n-2}}{(n-1)!} \Big(\frac{s}{2^{n-1}} - 2\xi\Big)^{n-1} f(\xi)\, d\xi\, ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \int\limits_0^{t/2^n} \int\limits_{2^n \xi}^{t} \frac{2^0 2^1 \dots 2^{n-2}}{(n-1)!} \Big(\frac{s}{2^{n-1}} - 2\xi\Big)^{n-1} f(\xi)\, ds\, d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \int\limits_0^{t/2^n} \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \Big(\frac{t}{2^{n-1}} - 2\xi\Big)^{n} f(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^t \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \Big(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\Big)^{n} f(s)\, ds.$$

Отметим, что последнее равенство следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [3, с. 200]. Действительно, для произвольного $T > 0$ подынтегральная функция удовлетворяет при $t \in [0, T]$, $s \in [0, t]$ неравенству

$$\Big| \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \Big(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\Big)^{n} f(s) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |p|^n \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \Big(\frac{T}{2^{n-1}}\Big)^{n} |f(s)| = |f(s)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|p|^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}},$$

где числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \big(n! 2^{n(n-1)/2}\big)^{-1} |p|^n T^n$ сходится.

Таким образом, получена функция Коши уравнения (3)

$$C(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \Big(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\Big)^{n}$$

и фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения

$$X(t) = \int\limits_0^t C(t,s)\, ds = \int\limits_0^{t/2^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n\, 2^{n(n-1)/2}}{n!} \Big(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\Big)^{n} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n\, t^{n+1}}{(n+1)! 2^{n(n+1)/2}}.$$

В заключение рассмотрим линейное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - p\,\dot{x}\big(h(t)\big) = f(t), \quad t \geqslant 0, \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0. \tag{5}$$

Будем предполагать, что измеримая функция $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $h(t) \leqslant t$ и выполнено следующее условие

$$|p|\,\frac{\mu\big(h^{-1}(\Omega)\big)}{\mu\,\Omega} < 1 \tag{6}$$

Определим оператор $(S_h y)(t) = \begin{cases} y\big(h(t)\big), & \text{если} \quad h(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad h(t) < 0 \end{cases}$. Вследствие принятых предположений оператор S_h действует в L и $\|S_h\| < 1$ (см. [2, с. 21]), следовательно, при любых α, f задача Коши с начальным условием $x(0) = \alpha$ однозначно разрешима. Решение может быть определено через ряд Неймана

$$\dot{x}(t) = f(t) + p\,(S_h f)(t) + p^2\,(S_{h^2} f)(t) + \ldots. \tag{7}$$

Для упрощения выкладок приведем решение уравнения (5) в частном случае при $h(t) = t/2$. Итак, рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - p\,\dot{x}\big(t/2\big) = f(t), \quad t \geqslant 0. \tag{5$'$}$$

Условие (6) приобретает вид неравенства $|p| < 1/2$. В силу (7) имеем

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n\, f(t/2^n), \quad x(t) = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{t/2^n} (2p)^n\, f(s)\, ds.$$

Таким образом, функция Коши уравнения $(5')$ равна

$$C(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0,\,t/2^n]}(s)\,(2p)^n,$$

или, что то же самое

$$C(t,s) = \frac{1-(2p)^{n+1}}{1-2p}, \text{ если } c \in [t/2^n,\, t/2^{n+1}], \quad n = 0.1, 2, \ldots$$

В [4] предложен метод нахождения функции Грина уравнения (5), использующий, как и в нашей работе, ряд Неймана (7).

В связи с приведенными результатами отметим, что методам приближенного нахождения частных решений функционально-дифференциальных уравнений посвящено существенно меньшее число работ, чем решению обыкновенных дифференциальных уравнений (см. монографию [5] и статью [6]). Приближенное нахождение общего решения в литературе почти не рассматривалось. Выделим работы [7, 8], в которых предложен метод нахождения общего решения через приближение функции Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

3. *Вулих Б.З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973. 352 с.

4. *Жуковский Е.С.* Использование ряда Неймана для построения функции Грина // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 1997. Т. 2. № 2. С. 205–206.

5. *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Изд-во: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 256 с.

6. *Жуковская Т.В., Молоканова Е.А.* Численные методы решения эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. № 5. С. 1352–1359.

7. *Жуковская Т.В.* Интерполяция функции Коши // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2002. Т. 7. № 1. С. 110–111.

8. *Жуковская Т.В.* Метод построения функции Коши уравнения с обобщенно вольтерровым оператором // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2003. Т. 8. № 1. С. 162-163.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-97504) в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 2014/285).

Поступила в редакцию 2 июня 2015 г.

Borzova M.V., Kozadaev A.V., Tahir H.T.M. SOME QUADRATURE INTEGRABLE FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Some simple first order linear functional-differential equations integrable in quadrature are considered. For such equations, the general solution involving the Cauchy function is found.

Key words: linear functional-differential equations; differential equations with delay; the Cauchy function; general solution.

Борзова Марина Васильевна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, инженер кафедры алгебры и геометрии, e-mail: bmv_1603@mail.ru

Borzova Marina Vasilevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Engineer of the Algebra and Geometry Department, e-mail: bmv_1603@mail.ru

Козадаев Алексей Владимирович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Kozadaev Aleksei Vladimirovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate Student of Algebra and Geometry Department, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Тахир Халид Тахир Мизхир, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: khalidtahir89@yahoo.com

Tahir Khalid Tahir Mizhir, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Algebra and Geometry Department, e-mail: khalidtahir89@yahoo.com