Выведенные функциональные зависимости применяются при дальнейшем описании поведения домашних хозяйств, оценке характера взаимодействия с другими экономическими агентами рассматриваемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И.* Макроэкономика: Учебник. 6-е издание, испр. и доп. М.: Высшее образование, 2006. 654 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке ЗАО «ПРОГНОЗ».

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Simonov P.M., Shults M.N. MODELING HOUSEHOLDS IN GENERAL EQUILIBRIUM THEORY
The article discusses the use of the general equilibrium theory in constructing and analyzing a model of the household functioning.
Key words: general equilibrium theory; computable general equilibrium model; households.

Симонов Петр Михайлович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: simpm@mail.ru
Simonov Pyotr Mihkailovich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: simpm@mail.ru

Шульц Михаил Николаевич, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: mshults@mail.ru
Shults Mikhail Nikolaevich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: mshults@mail.ru

УДК 517.911.5

АППРОКСИМАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ВНЕШНИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© В.В. Скоморохов

Ключевые слова: гиперболические дифференциальные включения с импульсными воздействиями; аппроксимирующее отображение; радиус внешних возмущений; модуль непрерывности отображения; δ –решение.
В работе изучаются гиперболические дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Дано определение приближенного решения (δ –решения) гиперболического дифференциального включения с импульсными воздействиями, установлены ассимптотические свойства множеств решений аппроксимирующих дифференциальных включений с внешними возмущениями.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство с нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых, компактов $\mathbb{R}^n$; $h[\cdot,\cdot]$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами, содержащимися в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим $C^n([a,b]\times[c,d])$ пространство непрерывных функций $u\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|u\| = \max\{|u(t,x)|\colon (t,x)\in[a,b]\times[c,d]\}$. $L^n([a,b]\times[c,d])$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $u\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|u\| = \int\limits_a^b\int\limits_c^d |u(t,x)|\,dtdx$.

Будем говорить, что $F\colon [a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори, если выполняются следующие условия:

1) при каждом $u\in\mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot,\cdot,u)$ измеримо;

2) при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$ отображение $F(t,x,\cdot)$ непрерывно;

3) для каждого ограниченного множества $V\subset\mathbb{R}^n$ найдется такая функция $m_V(\cdot,\cdot)\in L^1([a,b]\times[c,d])$, что при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$ и всех $u\in V$ выполняется неравенство $\|F(t,x,u)\|\leqslant m_V(t,x)$.

Пусть $t_k\in[a,b]$ ($a<t_1<\ldots<t_m<b$) — конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n([a,b]\times[c,d])$ множество всех непрерывных на каждом из промежутков $[a,t_1]\times[c,d]$, $(t_1,t_2]\times[c,d]$, $\ldots$, $(t_m,b]\times[c,d]$ ограниченных функций $u\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=1,2,\ldots,m$ с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|u(t,x)|\colon t\in[a,b]\times[c,d]\}$.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\in F(t,x,u(t,x)),\quad (t,x)\in[a,b]\times[c,d], \tag{1}$$

$$\Delta(u(t_k,x)) = I_k(u(t_k,x)),\quad k=1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

$$u(t,0)=\alpha(t),\quad u(0,x)=\beta(x), \tag{3}$$

где $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, непрерывны и $\alpha(0)=\beta(0)$, отображение $F\colon [a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Отображения $I_k\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $k=1,2,\ldots,m$, непрерывны, $\Delta(u(t_k,x)) = u(t_k+0,x)-u(t_k,x)$, $k=1,2,\ldots,m$.

Под *решением задачи* (1)–(3) будем понимать функцию $u\in\widetilde{\mathbf{C}}^n([a,b]\times[c,d])$, для которой существует такое $q\in L^n([a,b]\times[c,d])$, что при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$ выполняется включение $q(t,x)\in F(t,x,u(t,x))$, и при всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$ имеет место представление

$$u(t,x)=\alpha(t)+\beta(x)-\alpha(0)+\int\limits_a^t\int\limits_c^x q(s,\tau)\,dsd\tau+\sum_{k=1}^m\chi_{(t_k,b]}I_k(u(t_k,x)). \tag{4}$$

Обозначим через $K([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta\colon [a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, обладающих следующими свойствами:

1) при каждых $(u,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,\cdot,u,\delta)$ измерима;

2) при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$ и всех $\delta\in[0,\infty)$ функция $\eta(t,x,\cdot,\delta)$ непрерывна;

3) для каждых $U\in\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta\in[0,\infty)$ существует такая суммируемая функция $\mu_{U,\delta}\colon [a,b]\times[c,d]\to[0,\infty)$, что при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$ и всех $u\in U$ и $\tau\in[0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,x,u,\tau)\leqslant\mu_{U,\delta}(t,x)$;

4) при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$ и каждого $u\in\mathbb{R}^n$ выполняются равенства $\lim\limits_{\substack{z\to u\\ \delta\to 0+0}}\eta(t,x,z,\delta)=\eta(t,x,u,0)=0$.

Обозначим через $P([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta\colon [a,b]\times[c,d]\times \times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, обладающих свойствами из класса функций $K([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times \times[0,\infty))$, а также удовлетворяющих следующим условиям: для каждых $U\in\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta\in(0,\infty)$ найдутся такие числа $r(U,\delta)>0$ и $\gamma(U,\delta)\geqslant 0$, что при почти всех $(t,x)\in \in[a,b]\times[c,d]$ и всех $u\in U$ число $r(U,\delta)$ удовлетворяет неравенству $r(U,\delta)\leqslant\eta(t,x,u,\delta)$, а для числа $\gamma(U,\delta)$ при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$, всех $u\in U$ и $\tau\in[0,\delta]$ имеет место оценка $\eta(t,x,u,\tau)\leqslant\gamma(U,\delta)$.

Пусть $\psi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in P([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Определим функцию $\varphi(\psi)\colon [a,b]\times[c,d]\times \times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ равенством

$$\varphi(\psi)(t,x,u,\delta)=\sup_{v\in B[u,\psi(t,x,u,\delta)]} h[F(t,x,u),F(t,x,v)]. \tag{5}$$

Значения функции $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ в точке (t,x,u,δ) будем называть *модулем непрерывности отображения* $F\colon[a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ в точке (t,x,u) по переменной u в шаре $B[u,\psi(t,x,u,\delta)]$, функцию $\psi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ — *функцией радиуса модуля непрерывности* или просто радиусом непрерывности, а саму функцию $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ — *функцией модуля непрерывности* или просто модулем непрерывности отображения $F\colon[a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ относительно радиуса непрерывности $\psi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$.

Будем говорить, что многозначное отображение $\widetilde{F}\colon[a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *аппроксимирует* отображение $F\colon[a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, если найдется такая функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, что при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$ и всех $(u,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ выполняется оценка

$$h[F(t,x,u),\widetilde{F}(t,x,u,\delta)]\leqslant\xi(t,x,u,\delta). \tag{6}$$

Отображение $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *аппроксимирующим отображение* $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимирующим. Функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ в неравенстве (6) определяет степень близости значения $\widetilde{F}(t,x,u,\delta)$ в точке $(t,x,u)\in[a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n$ к значению $F(t,x,u)$ для каждого фиксированного $\delta\in[0,\infty)$. Эту функцию $\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *степенью аппроксимации отображения* $F\colon[a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ отображением $\widetilde{F}\colon[a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ или просто степенью аппроксимации.

Пару $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot))$ будем называть *аппроксимацией отображения* $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимацией, а если при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$ и всех $(u,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ выполняется включение $F(t,x,u)\subset\widetilde{F}(t,x,u,\delta)$, то *аппроксимацией вложением.*

Значения аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ могут вычисляться с некоторой степенью точности, которую можно задать некоторой функцией $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[c,d]\times \times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$.

В связи с этим рассмотрим отображение $Q_\eta\colon[a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством

$$Q_\eta(t,x,u,\delta)=\widetilde{F}(t,x,u,\delta)^{\eta(t,x,u,\delta)}, \tag{7}$$

где функция $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ в каждой точке $(t,x,u)\in[a,b]\times[c,d]\times \times\mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $\delta\in[0,\infty)$ определяет погрешность вычисления значений аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$. Далее, функцию $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *радиусом внешних возмущений аппроксимирующего отображения* $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ или просто радиусом внешних возмущений.

Пусть $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Рассмотрим при каждом фиксированном $\delta\in[0,\infty)$ дифференциальное включение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\in Q_\eta(t,x,u(t,x),\delta), \tag{8}$$

где отображение $Q_\eta\colon [a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ задано равенством (7). Дифференциальное включение (8) будем называть *аппроксимирующим дифференциальное включение* (1) *с внешними возмущениями.*

Каждое решение включения (8) с импульсными воздействиями (2) и условиями (3) при фиксированном $\delta>0$ будем называть δ*-решением* (приближенным решением с точностью до δ или просто приближенным решением) *включения* (1).

Пусть отображение $F\colon [a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\in \mathrm{co}\, F(t,x,u(t,x)), \tag{9}$$

$$\Delta(u(t_k,x)) = I_k(u(t_k,x)),\quad k=1,2,\ldots,m, \tag{10}$$

$$u(t,0)=\alpha(t),\quad u(0,x)=\beta(x), \tag{11}$$

где $\mathrm{co}\,F(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot))$ — выпуклая оболочка множества $F(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot))$, отображения $I_k\colon\mathbb{R}^n\to$ $\to\mathbb{R}^n$, $k=1,2,\ldots,m$, непрерывны, $\Delta(u(t_k,x))=u(t_k+0,x)-u(t_k,x)$, $k=1,2,\ldots,m$, $\alpha(\cdot),\beta(\cdot)$, непрерывны и $\alpha(0)=\beta(0)$.

Обозначим через $H(V)$, $H_{\mathrm{co}}(V)$ множества решений задач (1)–(3) и (9)–(11), соответственно, принадлежащих множеству $V\subset\widetilde{\mathbf{C}}^n([a,b]\times[c,d])$.

Пусть $V\subset\widetilde{\mathbf{C}}^n([a,b]\times[c,d])$, $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Обозначим через $H_{\eta(\delta)}(V)$ множество всех решений задачи (8), (2), (3) с заданным радиусом внешних возмущений, принадлежащих множеству V.

Т е о р е м а. *Пусть V — ограниченное замкнутое множество пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n([a,b]\times[c,d])$ и пусть $\psi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in P([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Далее, пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображения $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ вложением. Тогда для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon>0$, что при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$, всех $u\in(U(V))^\varepsilon$ и $\delta\in[0,\infty)$ имеет место неравенство*

$$\varphi(\psi)(t,x,u,\delta)\leqslant\eta(t,x,u,\delta),$$

где $\varphi(\psi)(t,x,u,\delta)$ — модуль непрерывности отображения $F(\cdot,\cdot,\cdot)$, выполняется соотношение

$$H_{\mathrm{co}}(V)=\bigcap_{\delta>0}\overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)},$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}$ — замыкание в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n([a,b]\times[c,d])$ множества $H_{\eta(\delta)}(V^\delta)$, V^δ — замкнутая в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n([a,b]\times[c,d])$ δ-окрестность множества V.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К.: Вища шк., 1987.

3. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

4. *Булгаков А.И., Скоморохов В.В., Филиппова О.В.* Асимптотические свойства множества δ–решений функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1039-1043.

5. *Булгаков А.И., Скоморохов В.В.* Аппроксимация дифференциальных включений // Матем. сборник. 2002. Т. 193. № 2. С. 35-52.

Поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Skomorokhov V.V. APPROXIMATION OF HYPERBOLIC DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH IMPULSES AND WITH EXTERNAL PERTURBATIONS

In this paper, hyperbolic differential inclusions with external perturbations and with impulses are considered. Here we represent the concept of approximate solution (δ –solution) for a hyperbolic differential inclusion with impulses. The asymptotic properties of solutions sets to approximating differential inclusions with external disturbance are derived.

Key words: hyperbolic differential inclusions with impulses; approximating map; radius of external perturbations; modulus of continuity; δ –solution.

Скоморохов Виктор Викторович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru

Skomorokhov Viktor Viktorovich, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru

УДК 517.968

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© С.В. Солодуша, И.В. Мокрый

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра I рода; численные методы.
Статья посвящена специфике вычисления ядер уравнений Вольтерра I рода при фиксированной длине мантиссы в машинном представлении вещественного числа с плавающей точкой. На языке PASCAL разработано программное обеспечение для вычисления ядер, реализующее функцию отслеживания достоверных разрядов мантиссы. На тестовых примерах проиллюстрированы типовые случаи систематического накопления ошибок.

В статье рассматривается интегральное уравнение Вольтерра I рода типа свертки:

$$\int_0^t K_N(t-s)\phi(s)ds = y(t),\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

$$K_N(t-s) = \sum_{q=1}^{N} (-1)^{q+1}\, q^2 e^{-\pi^2 q^2 (t-s)},\ y(t) = \frac{1}{2\pi^2} g_0\,(t)\,, \tag{2}$$

введенное в [1] в связи с поиском решения $u(1,t)$ обратной граничной задачи

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,1)\,, \quad t \geqslant 0,$$

$$u\,(x,0) = 0,\ u\,(0,t) = 0,\ u_x\,(0,t) = g_0\,(t)\,.$$

При численном решении (1), (2) возникают погрешности, связанные не только с погрешностью метода, но и с ошибками при выполнении операций машинной арифметики над вещественными числами с плавающей точкой.

Цель данной работы — разработать алгоритм вычисления K_N , учитывающий особенности машинной арифметики и обеспечивающий желаемое (заданное) число достоверных