УДК 515.124+515.126.83
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-380-385

ПРИМЕР ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ МЕТРИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПУСТЫХ ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

© **Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко**

В пространстве непустых замкнутых подмножеств заданного метрического пространства определяется векторнозначная метрика, отличная от используемых в литературе векторных обобщений метрики Хаусдорфа. Предлагаемая векторнозначная метрика возникает в задачах анализа многозначных отображений с возможно неограниченными образами, позволяет получить достаточно полную информацию о расстояниях между точками соответствующих множеств, оказывается удобной в утверждениях о неподвижной точке многозначных отображений.
Ключевые слова: пространство непустых замкнутых подмножеств метрического пространства; векторнозначная метрика; полное метрическое пространство.

Пусть E — линейное нормированное пространство, в котором определен замкнутый выпуклый конус E_+, и задан порядок: $\forall e_1, e_2 \in E \;\; e_1 \preceq e_2 \Leftrightarrow e_2 - e_1 \in E_+$. Векторнозначная метрика на непустом множестве $\mathcal{X}$ определяется как функция $\mathfrak{d} : \mathcal{X}^2 \to E_+$, удовлетворяющая «стандартным» аксиомам метрики:

$$\forall x, y, z \in \mathcal{X} \quad \mathfrak{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \mathfrak{d}(x,y) = \mathfrak{d}(y,x), \quad \mathfrak{d}(x,y) \preceq \mathfrak{d}(x,z) + \mathfrak{d}(z,y). \tag{1}$$

В пространстве с векторнозначной метрикой естественным образом определяются понятия фундаментальной и сходящейся последовательностей, полноты, сепарабельности и т. д. Такие пространства возникают при исследовании конечных и бесконечных систем уравнений, в задачах численного анализа.

Понятие векторнозначной метрики введено Duro Kurepa в [1]. Пространства с векторнозначными метриками и их обобщения исследовались многими авторами; в литературе такие пространства называют псевдометрическими, K-метрическими, вектор-метрическими, коническими метрическими, обобщенно метрическими и др. (см. статью [2] и приведенную в ней библиографию). Ряд работ (см., например, [3]) посвящен анализу многозначных отображений, действующих в пространства с векторнозначной метрикой. Однако, такие исследования встречают затруднения, связанные с тем, что порядок в пространстве E значений векторнозначной метрики является частичным, а не линейным, как в $\mathbb{R}$. Это обстоятельство не позволяет, например, определить «векторное» расстояние от точки до множества как инфимум всех расстояний от точки до точек множества, поскольку этот инфимум может не существовать. Соответственно, не удается предложить точный аналог и расстояния по Хаусдорфу между множествами в пространстве с векторнозначной метрикой.

В данной статье для пространства непустых замкнутых подмножеств заданного метрического пространства дается определение векторнозначной метрики, отличное от многочисленных векторных обобщений метрики Хаусдорфа. Предлагаемая векторнозначная метрика возникает не в проблеме исследования систем включений, а в задачах анализа многозначных отображений с замкнутыми, возможно неограниченными образами, и представляет, на наш взгляд, достаточно полный набор информации о расстояниях между точками соответствующих множеств. Эта векторнозначная метрика оказывается удобной в утверждениях о неподвижной точке многозначных отображений.

В качестве пространства E значений векторнозначной метрики мы используем здесь пространство $\mathfrak{M}$ последовательностей $v=(v_0,v_1,v_2,...)$ действительных чисел, имеющих ограниченное с весом $D\doteq(D_1,D_2,D_3,...)$ приращение, т. е.

$$\mathfrak{M}\ni v=(v_0,v_1,v_2,...)\iff \Delta v\doteq\left(v_0,\frac{v_1-v_0}{D_1},\frac{v_2-v_1}{D_2},\frac{v_3-v_2}{D_3},...\right)\in m,$$

где m — пространство ограниченных последовательностей. Пространство $\mathfrak{M}$, очевидно, линейное с привычными операциями покомпонентного сложения и умножения на числа, изоморфное пространству m: отображение $v\mapsto\Delta v$ является биекцией, сохраняющей операции. В $\mathfrak{M}$ определим норму $\|v\|_{\mathfrak{M}}=\|\Delta v\|_m=\sup_i|\Delta v_i|$, где $\Delta v_0\doteq v_0$ и $\Delta v_i\doteq\dfrac{v_i-v_{i-1}}{D_i}$ при $i=1,2,...$. Далее в пространстве $\mathfrak{M}$ можно выделить выпуклый замкнутый конус $\mathfrak{M}_+$, состоящий из последовательностей с неотрицательными компонентами. Конус $\mathfrak{M}_+$ задает на $\mathfrak{M}$ порядок, который мы будем обозначать $\leqslant$, а именно: для любых $v,w\in\mathfrak{M}$ имеем $v\leqslant w$ тогда и только тогда, когда $w-v\in\mathfrak{M}_+$.

Пусть (X,ϱ_X) — метрическое пространство. Мы будем использовать следующие обозначения: $\overline{M}\doteq X\setminus M$ — дополнение к множеству $M\subset X$; $\operatorname{clos}(X)$ — пространство всех *непустых замкнутых* подмножеств X; $B^o_X(x_0,r)\doteq\{x\in X:\varrho_X(x,x_0)<r\}$, $B_X(x_0,r)\doteq\{x\in X:\varrho_X(x,x_0)\leqslant r\}$ — открытый и, соответственно, замкнутый шары в пространстве X радиуса $r>0$ с центром в точке x_0; $B^o_X(x_0,0)=\varnothing$; $\varrho_X(x,M)\doteq\inf_{y\in M}\varrho_X(x,y)$ — расстояние в X от точки x до множества $M\neq\varnothing$; $d_X(M_1,M_2)\doteq\sup_{x\in M_1}\varrho_X(x,M_2)$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества M_1 от M_2; $\operatorname{dist}_X(M_1,M_2)\doteq\max\big\{d_X(M_1,M_2);d_X(M_2,M_1)\big\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами M_1, M_2. В перечисленных обозначениях будем опускать индекс, если из изложения ясно, в каком пространстве определяется соответствующая величина.

Зафиксируем $\theta\in X$ и обозначим $B^o(r)\doteq B^o_X(\theta,r)$; $B(r)\doteq B_X(\theta,r)$. Метрическое пространство X будем предполагать неограниченным, т. е. будем считать, что $\sup_{x\in X}\varrho(\theta,x)=\infty$. Для каждого $r\geq0$ определим оператор $\mathfrak{S}_r:\operatorname{clos}(X)\to\operatorname{clos}(X)$ равенством

$$\mathfrak{S}_rH\doteq H\cup\overline{B^o(r)}. \tag{2}$$

Очевидно, что для любого $H\in\operatorname{clos}(X)$ и любых $r_2>r_1>0$ выполнено $\mathfrak{S}_{r_2}H\subset\mathfrak{S}_{r_1}H$ и $H=\bigcap\limits_{r>0}\mathfrak{S}_rH$. Далее, для произвольных $F,G\in\operatorname{clos}(X)$ определим величину $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_rF,\mathfrak{S}_rG\big)$, свойства которой описывают следующие утверждения.

Л е м м а 1. [4] *Пусть* $F,G\in\operatorname{clos}(X)$. *Тогда:*

1) *для любого* $r\geqslant0$ *выполнено* $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_rF,\mathfrak{S}_rG\big)<\infty$;
2) *функция* $\mathbb{R}_+\ni r\mapsto\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_rF,\mathfrak{S}_rG\big)\in\mathbb{R}_+$ *не убывает;*
3) *для любого* $r\geqslant0$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_rF,\mathfrak{S}_rG\big)\leqslant\operatorname{dist}(F,G)$$

и соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_rF,\mathfrak{S}_rG\big)=\operatorname{dist}(F,G).$$

Л е м м а 2. *Для любых* $r_2>r_1>0$ *и* $F,G\in\operatorname{clos}(X)$ *справедливо неравенство*

$$0\leqslant\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_2}F,\mathfrak{S}_{r_2}G\big)-\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_1}F,\mathfrak{S}_{r_1}G\big)\leqslant\operatorname{dist}\big(\overline{B^o(r_2)},\overline{B^o(r_1)}\big). \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость первого неравенства следует из пункта 2) леммы 1. Для доказательства второго неравенства покажем сначала, что для любого множества $H \in \mathrm{clos}(X)$

$$\mathrm{dist}\left(\mathfrak{S}_{r_1}H, \mathfrak{S}_{r_2}H\right) \leqslant \mathrm{dist}\left(\overline{B^o(r_1)}, \overline{B^o(r_2)}\right). \tag{4}$$

Оценим расстояние от произвольной точки $x \in \mathfrak{S}_{r_1}H$ до множества $\mathfrak{S}_{r_2}H$. Если $x \in B^o(r_1)$ или $x \in \overline{B^o(r_2)}$, то, очевидно, $\varrho\left(x, \mathfrak{S}_{r_2}H\right) = 0$. А в случае, когда $x \in B^o(r_2) \backslash B^o(r_1)$, имеем $\varrho\left(x, \mathfrak{S}_{r_2}H\right) \leqslant \varrho\left(x, \overline{B^o(r_2)}\right) \leqslant \mathrm{dist}\left(\overline{B^o(r_1)}, \overline{B^o(r_2)}\right)$. Следовательно, $d\left(\mathfrak{S}_{r_1}H, \mathfrak{S}_{r_2}H\right) \leqslant$ $\leqslant \mathrm{dist}\left(\overline{B^o(r_1)}, \overline{B^o(r_2)}\right)$. Поскольку $\mathfrak{S}_{r_2}H \subset \mathfrak{S}_{r_1}H$, то $d\left(\mathfrak{S}_{r_2}H, \mathfrak{S}_{r_1}H\right) = 0$. Таким образом, оценка (4) справедлива.

Пусть теперь F, G — произвольные замкнутые множества пространства X. Для любого $x \in \mathfrak{S}_{r_2}F$ (и, следовательно, $x \in \mathfrak{S}_{r_1}F$), используя свойства метрики Хаусдорфа, получаем:

$$\varrho(x, \mathfrak{S}_{r_2}G) \leqslant \varrho(x, \mathfrak{S}_{r_1}G) + \mathrm{dist}\left(\mathfrak{S}_{r_1}G, \mathfrak{S}_{r_2}G\right) \leqslant \mathrm{dist}\left(\mathfrak{S}_{r_1}F, \mathfrak{S}_{r_1}G\right) + \mathrm{dist}\left(\overline{B^o(r_1)}, \overline{B^o(r_2)}\right).$$

Аналогично, для любого $y \in \mathfrak{S}_{r_2}G$ выполнено

$$\varrho(y, \mathfrak{S}_{r_2}F) \leqslant \mathrm{dist}\left(\mathfrak{S}_{r_1}G, \mathfrak{S}_{r_1}F\right) + \mathrm{dist}\left(\overline{B^o(r_1)}, \overline{B^o(r_2)}\right).$$

Таким образом, второе неравенство в (3) также имеет место. $\square$

Для определения векторнозначной метрики в $\mathrm{clos}(X)$ построим последовательность радиусов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ следующим образом: положим $r_0 = 0$; так как пространство X неограничено, то найдется элемент $x_1 \in X$, $x_1 \neq \theta$, такой, что $\varrho(\theta, x_1) \geqslant 1$, положим $r_1 = \varrho(\theta, x_1)$; в силу неограниченности X существует элемент $x_2 \in X$, $x_2 \notin B(r_1)$, такой, что $\varrho(\theta, x_2) \geqslant r_1 + 1$, положим $r_2 = \varrho(\theta, x_2)$; далее, найдется $x_3 \in X$, $x_3 \notin B(r_2)$, такой, что $\varrho(\theta, x_3) \geqslant r_2 + 1$, положим $r_3 = \varrho(\theta, x_3)$ и т. д. Получим последовательность неотрицательных чисел $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ такую, что $r_i \to \infty$, более того, $r_{i+1} - r_i \geqslant 1$ для любого i. Положим $D_i \doteq \mathrm{dist}\left(\overline{B^o(r_i)}, \overline{B^o(r_{i-1})}\right)$. Следует отметить, что $D_i \geqslant r_i - r_{i-1}$.

Пусть теперь $F, G \in \mathrm{clos}(X)$; определим $\mathfrak{d}_i(F,G) \doteq \mathrm{dist}\left(\mathfrak{S}_{r_i}F, \mathfrak{S}_{r_i}G\right)$, $i = 0, 1, ...$; очевидно, что $\mathfrak{d}_0(F,G) = 0$. Сопоставим паре (F,G) последовательность $\mathfrak{d}(F,G) \doteq (\mathfrak{d}_0(F,G), \mathfrak{d}_1(F,G), \mathfrak{d}_2(F,G), ...)$. Обозначим $\Delta\mathfrak{d}_i(F,G) \doteq \mathfrak{d}_i(F,G) - \mathfrak{d}_{i-1}(F,G)$, $i = 1, 2, ...$, $\Delta\mathfrak{d}_0(F,G) \doteq \mathfrak{d}_0(F,G) = 0$, и положим $\Delta\mathfrak{d}(F,G) \doteq (\Delta\mathfrak{d}_1(F,G), \Delta\mathfrak{d}_2(F,G), ...)$. Согласно лемме 2, для любого $i = 1, 2, ...$ выполнено

$$0 \leqslant \frac{\Delta\mathfrak{d}_i(F,G)}{D_i} = \frac{\mathrm{dist}\left(\mathfrak{S}_{r_i}F, \mathfrak{S}_{r_i}G\right) - \mathrm{dist}\left(\mathfrak{S}_{r_{i-1}}F, \mathfrak{S}_{r_{i-1}}G\right)}{\mathrm{dist}\left(\overline{B^o(r_i)}, \overline{B^o(r_{i-1})}\right)} \leqslant 1,$$

т. е. для любых $F, G \in \mathrm{clos}(X)$ имеем $\mathfrak{d}(F,G) \in \mathfrak{M}_+$. Построенная таким образом функция $\mathfrak{d}: \mathrm{clos}(X) \times \mathrm{clos}(X) \to \mathfrak{M}_+$ удовлетворяет условиям (1), поскольку при каждом $i = 0, 1, ...$ расстояние по Хаусдорфу $\mathrm{dist}\left(\mathfrak{S}_{r_i}F, \mathfrak{S}_{r_i}G\right)$ удовлетворяет аксиомам метрики.

Сходимость последовательности $\{F^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{clos}(X)$ к множеству $F \in \mathrm{clos}(X)$ относительно введенной метрики $\mathfrak{d}$ означает сходимость $\mathfrak{d}\left(F^k, F\right) \to 0$ в пространстве $\mathfrak{M}$, т. е. $||\Delta\mathfrak{d}\left(F^k, F\right)||_m \to 0$. Последовательность $\{F^k\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной относительно метрики $\mathfrak{d}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любых $k, l > N$ выполнено неравенство $||\Delta\mathfrak{d}\left(F^k, F^l\right)||_m \leqslant \varepsilon$.

Т е о р е м а 1. *Если пространство* (X, ϱ) *полное, то пространство* $(\mathrm{clos}(X), \mathfrak{d})$ *также является полным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{F^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{clos}(X)$ — некоторая фундаментальная (относительно метрики $\mathfrak{d}$) последовательность. Покажем сначала, что для любого $i = 0, 1, ...$

последовательность $\{\mathfrak{S}_{r_i}F^k\}_{k=1}^{\infty}$ будет фундаментальной в метрике Хаусдорфа. Зафиксируем $i=i_0$ и выберем $\varepsilon>0$. Так как последовательность $\{F^k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна, то для $\overline{\varepsilon}=\varepsilon(D_1+D_2+...+D_{i_0})^{-1}$ найдется номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что для любых $k,l>N$ и $i=1,2,...$ выполнено

$$\frac{\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_i}F^k,\mathfrak{S}_{r_i}F^l\big)-\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_{i-1}}F^k,\mathfrak{S}_{r_{i-1}}F^l\big)}{D_i}\leqslant\overline{\varepsilon}. \tag{5}$$

Учитывая, что $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_0}F^k,\mathfrak{S}_{r_0}F^l\big)=0$, из (5) получим следующие соотношения:

$$\frac{\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_1}F^k,\mathfrak{S}_{r_1}F^l\big)}{D_1}\leqslant\overline{\varepsilon},\quad \operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_1}F^k,\mathfrak{S}_{r_1}F^l\big)\leqslant\overline{\varepsilon}D_1;$$
$$\frac{\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_2}F^k,\mathfrak{S}_{r_2}F^l\big)-\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_1}F^k,\mathfrak{S}_{r_1}F^l\big)}{D_2}\leqslant\overline{\varepsilon},\quad \operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_2}F^k,\mathfrak{S}_{r_2}F^l\big)\leqslant\overline{\varepsilon}D_2+\overline{\varepsilon}D_1;$$
$$\dots$$
$$\frac{\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_{i_0}}F^k,\mathfrak{S}_{r_{i_0}}F^l\big)-\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_{i_0-1}}F^k,\mathfrak{S}_{r_{i_0-1}}F^l\big)}{D_{i_0}}\leqslant\overline{\varepsilon},$$
$$\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_{i_0}}F^k,\mathfrak{S}_{r_{i_0}}F^l\big)\leqslant\overline{\varepsilon}D_{i_0}+...+\overline{\varepsilon}D_1=\overline{\varepsilon}\big(D_{i_0}+...+D_1\big)\big)=\varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{\mathfrak{S}_{r_i}F^k\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\big(\operatorname{clos}(X),\operatorname{dist}\big)$ для любого $i=0,1,\dots$.

Поскольку пространство (X,ϱ) полное, то пространство $\big(\operatorname{clos}(X),\operatorname{dist}\big)$ также является полным (см., например, [5]), и, значит, последовательность $\{\mathfrak{S}_{r_i}F^k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в метрике Хаусдорфа при каждом i к некоторому замкнутому множеству; обозначим это множество $\mathcal{F}_{r_i}$. Отметим, что $\overline{B^o(r_i)}\subset\mathcal{F}_{r_i}$.

Для каждого i определим множество $F_{r_i}\doteq\mathcal{F}_{r_i}\cap B^o(r_i)$. С возрастанием i множества F_{r_i} «расширяются» следующим образом (см. доказательство теоремы 1 в [4]): для любых $j>i$ выполнено $F_{r_i}=F_{r_j}\cap B^o(r_i)$, т. е. F_{r_i} есть подмножество F_{r_j}, содержащее элементы x такие, что $\varrho(\theta,x)<r_i$. Далее, построим множество $F\doteq\bigcup_{i=0}^{\infty}F_{r_i}$; это множество непусто, замкнуто (см. доказательство теоремы 1 в [4]) и $F_{r_i}=F\cap B^o(r_i)$, $\mathcal{F}_{r_i}=\mathfrak{S}_{r_i}F$ для любого i.

Покажем, что последовательность $\{F^k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к множеству F. Для произвольного ε, в силу фундаментальности последовательности $\{F^k\}_{k=1}^{\infty}$ относительно метрики $\mathfrak{d}$, найдется номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что для любых $k,l>N$ и любого $i=1,2,...$ справедливо неравенство

$$\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_i}F^k,\mathfrak{S}_{r_i}F^l\big)-\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_{i-1}}F^k,\mathfrak{S}_{r_{i-1}}F^l\big)\leqslant\varepsilon/2. \tag{6}$$

Далее, для каждого $i=1,2,...$ последовательность $\{\mathfrak{S}_{r_i}F^k\}$ сходится в метрике Хаусдорфа к множеству $\mathfrak{S}_{r_i}F$, поэтому для выбранного ε найдется такой номер $l=l(i)$, что

$$\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_i}F^l,\mathfrak{S}_{r_i}F\big)\leqslant\varepsilon/4\quad\text{и}\quad\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_i-1}F^l,\mathfrak{S}_{r_i-1}F\big)\leqslant\varepsilon/4. \tag{7}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $l>N$. Тогда из неравенств (6) и (7), используя свойства метрики Хаусдорфа, для любого $i=1,2,...$ получаем:

$$\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_i}F^k,\mathfrak{S}_{r_i}F\big)-\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_{i-1}}F^k,\mathfrak{S}_{r_{i-1}}F\big)\leqslant\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_i}F^k,\mathfrak{S}_{r_i}F^l\big)+\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_i}F^l,\mathfrak{S}_{r_i}F\big)-$$
$$-\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_i-1}F^k,\mathfrak{S}_{r_i-1}F^l\big)+\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_i-1}F^l,\mathfrak{S}_{r_i-1}F\big)\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon,$$

откуда следует сходимость $\mathfrak{d}\big(F^k,F\big)\to0$ при $k\to\infty$. □

П р и м е р.

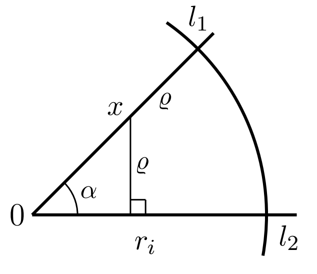

Рис. 1

Пусть $X=\mathbb{R}^2$, $\theta=0$. Положим $r_i=i$, $i=0,1,\ldots$. Тогда $D_i=1$ для любого $i=1,2,\ldots$. Найдем в $\big(\mathrm{clos}(\mathbb{R}^2),\mathfrak{d}\big)$ расстояние между двумя лучами l_1 и l_2, выходящими из нуля и образующими угол α. Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha\in[0,\pi/2)$ (см. рис. 1). Очевидно, $\mathfrak{d}_0(l_1,l_2)=$ $=0$. Найдем $\mathfrak{d}_1(l_1,l_2)=\mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}_1 l_1,\mathfrak{S}_1 l_2\big)$. Для любой точки $x\in\mathfrak{S}_1 l_1$ имеем $\varrho(x,\mathfrak{S}_1 l_2)=\min\{\varrho(x,l_2),\varrho(x,\overline{B^o(1)})\}$. Легко заметить, что $\sup\limits_{x\in\mathfrak{S}_1 l_1}\varrho(x,\mathfrak{S}_1 l_2)$ достигается в точке x равноудаленной от l_2 и $\overline{B^o(1)}$, откуда, после несложных вычислений, получаем $d\big(\mathfrak{S}_1 l_1,\mathfrak{S}_1 l_2\big)=\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

В силу симметрии, $d\big(\mathfrak{S}_1 l_2,\mathfrak{S}_1 l_1\big)=\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, и, значит, $\mathfrak{d}_1(l_1,l_2)=\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. Рассуждая аналогично, получим $\mathfrak{d}_2(l_1,l_2)=\dfrac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, и т.д. Таким образом, при $\alpha\in[0,\pi/2)$ имеем

$$\mathfrak{d}(l_1,l_2)=\left(0,\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha},\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha},\ldots\right)\ \text{и}\ \Delta\mathfrak{d}_i(l_1,l_2)=\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha},\ i=1,2,\ldots.$$

Далее, если $\alpha\in[\pi/2,\pi]$, то $\mathfrak{d}_0(l_1,l_2)=0$ и $\mathfrak{d}_i(l_1,l_2)=i/2$, $i=1,2,\ldots$, т. е.

$$\mathfrak{d}(l_1,l_2)=\left(0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots\right)\ \text{и}\ \Delta\mathfrak{d}_i(l_1,l_2)=\frac{1}{2},\ i=1,2,\ldots.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kurepa D.R.* Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo – distanciés // C. R. Acad. Sci. Paris, 1934. V. 198. P. 1563–1565.

2. *Proinov P.D.* A unified theory of cone metric spaces and its applications to the fixed point theory // Fixed Point Theory and Applications. 2013. Iss. 103. 51 p. doi:10.1186/1687-1812-2013-103.

3. *Asadi M., Soleimani H., Vaezpour S.M.* An Order on Subsets of Cone Metric Spaces and Fixed Points of Set-Valued Contractions // Fixed Point Theory and Applications. 2009. 8 p. doi:10.1155/2009/723203.

4. *Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A.* On multi-valued maps with images in the space of closed subsets of a metric space // Fixed Point Theory and Applications. 2013. Iss. 10. doi:10.1186/1687-1812-2013-10.

5. *Castaing C., Valadier M.* Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977. 278 pp.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00877), государственной программы Министерства образования и науки РФ № 2014/285 (проект № 2476).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

Панасенко Елена Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: panlena_t@mail.ru

UDC 515.124+515.126.83
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-380-385

ONE EXAMPLE OF A VECTOR-VALUED METRIC IN THE SPACE OF NONEMPTY CLOSED SUBSETS OF A METRIC SPACE

© E. S. Zhukovskiy, E. A. Panasenko

In the space of nonempty closed subsets of a given metric space, we define a vector-valued metric which differs from the known vector generalizations of the Hausdorff metric. The metric proposed appears in the analysis of multi-valued maps with possibly unbounded images. It allows to get more information about distances between elements of the corresponding sets and turns out to be convenient in fixed point theorems for multi-valued maps.

Key words: space of nonempty closed subsets of a metric space; vector-valued metric; complete metric space.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 14-01-00877) and by the state program of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation No. 2014/285 (project № 2476).

REFERENCES

1. *Kurepa D.R.* Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo – distanciés // C. R. Acad. Sci. Paris, 1934. V. 198. P. 1563–1565.

2. *Proinov P.D.* A unified theory of cone metric spaces and its applications to the fixed point theory // Fixed Point Theory and Applications. 2013. Iss. 103. 51 p. doi:10.1186/1687-1812-2013-103.

3. *Asadi M., Soleimani H., Vaezpour S.M.* An Order on Subsets of Cone Metric Spaces and Fixed Points of Set-Valued Contractions // Fixed Point Theory and Applications. 2009. 8 p. doi:10.1155/2009/723203.

4. *Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A.* On multi-valued maps with images in the space of closed subsets of a metric space // Fixed Point Theory and Applications. 2013. Iss. 10. doi:10.1186/1687-1812-2013-10.

5. *Castaing C., Valadier M.* Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977. 278 pp.

Received 21 March 2016.

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute for Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

Panasenko Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavina, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: panlena_t@mail.ru