УДК 517.98
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2093-2097

СИМВОЛЫ В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ КВАНТОВАНИИ

© **С. В. Цыкина**

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: tsykinasv@yandex.ru

Мы предлагаем новый подход к определению ковариантных и контравариантных символов в полиномиальном квантовании на пара-эрмитовых симметрических пространствах.
Ключевые слова: руппы Ли и алгебры Ли; псевдо-ортогональные группы; представления групп Ли; пара-эрмитовы симметрические пространства; ковариантные и контравариантные символы; полиномиальное квантование

В настоящей статье мы обсуждаем определения ковариантных и контравариантных символов в полиномиальном квантовании на пара-эрмитовых симметрических пространствах G/H. Мы это делаем на примере пространства G/H с псевдо-ортогональной группой движений $G=\mathrm{SO}_0(p,q)$ [1]. Оно есть G-орбита в алгебре Ли группы G. Понятия символов (а также преобразование Березина, их связывающее) являются центральными в этой теории [2]. Ранее мы определяли символы формулами, аналогичными формулам Березина для эрмитовых пространств. Сейчас мы предлагаем естественный и прозрачный способ их определения. Формулы Березина появляются как следствия. Мы исходим из некоторой воспроизводящей формулы.

Квантование, или исчисление символов, по Березину на однородном пространстве сопоставляет операторам D из некоторой алгебры $\mathcal{E}$ операторов, действующих в пространстве Фока, их символы – двух типов: ковариантные и контравариантные. В теории самого Березина для эрмитовых симметрических пространств G/K пространство Фока – это некоторое пространство аналитических функций на G/K, а алгебра $\mathcal{E}$ – алгебра ограниченных операторов в этом пространстве.

Группа G сохраняет форму $[x,y]=\sum \lambda_i x_i y_i$, где $\lambda_i=-1$ для $i=1,\ldots,p$ и $\lambda_i=1$ для $i=p+1,\ldots,n$. Мы будем считать, что G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x\mapsto xg$, так что векторы x из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки. Мы рассмотрим общий случай $p>1, q>1$.

Базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G образован матрицами $L_{ij}=E_{ij}-\lambda_i\lambda_j E_{ji}$, $i<j$, где E_{ij} – матричная единица. Подгруппа H является стационарной подгруппой матрицы $Z_0=L_{1,n}$, так что G/H есть как раз G-орбита точки Z_0.

Пусть $\mathcal{C}$ – конус $[x,x]=0$, $x\neq 0$ в $\mathbb{R}^n$. Группа G действует на нем транзитивно. Рассмотрим два сечения конуса: $\Gamma^-=\{x_1-x_n=2\}$, $\Gamma^+=\{x_1+x_n=2\}$.

Напомним необходимый нам материал из [3] о представлениях группы $G=\mathrm{SO}_0(p,q)$, связанных с конусом $\mathcal{C}$. Мы будем использовать следующие обозначения для "обобщенных степеней":

$$a^{[m]}=a(a+1)\ldots(a+m-1),\quad a^{(m)}=a(a-1)\ldots(a-m+1),$$

где a – число, а также обозначение $t^{\sigma,\varepsilon}=|t|^\sigma \mathrm{sgn}^\varepsilon t$.

Пусть $\sigma\in\mathbb{C}$, $\varepsilon=0,1$. Обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathcal{C})$ пространство функций f на конусе класса C^∞ и однородных "степени σ,ε", то есть

$$f(tx)=t^{\sigma,\varepsilon}f(x),\quad x\in\mathcal{C},\quad t\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G действует в этом пространстве сдвигами:

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g)f\right)(x)=f(xg).$$

Введем следующую билинейную форму в функциях на $\mathbb{R}^{n-2}$ (то есть в функциях на Γ^- и на Γ^+):

$$\langle\langle f,\,h\rangle\rangle=\int f(\xi)\,h(\xi)\,d\xi=\int f(\eta)\,h(\eta)\,d\eta,$$

интеграл берется по $\mathbb{R}^{n-2}$. В дальнейшем подразумевается, что все интегралы по $d\xi$ и по $d\eta$ берутся по $\mathbb{R}^{n-2}$.

Сечения $\Gamma^\pm$ пересекаются один раз почти с каждой образующей конуса $\mathcal{C}$. Поэтому линейное действие группы G на конусе дает "дробно-линейные" действия на Γ^- и Γ^+, определенные почти всюду на $\Gamma^\pm$. Это позволяет ввести координаты (глобальные) на Γ^- и Γ^+ с помощью векторов $\xi=(\xi_2,\ldots,\xi_{n-1})$ и $\eta=(\eta_2,\ldots,\eta_{n-1})$ из $\mathbb{R}^{n-2}$, а именно, векторам ξ и η отвечают следующие точки из Γ^- и Γ^+, соответственно:

$$x(\xi)=\big(1+\langle\xi,\xi\rangle,\,2\xi,\,-1+\langle\xi,\xi\rangle\big),$$

$$y(\eta)=\big(1+\langle\eta,\eta\rangle,\,2\eta,\,1-\langle\eta,\eta\rangle\big).$$

Пространство G/H можно отождествить с прямым произведением многообразия образующих конуса на себя, следовательно, можно отождествить (с точностью до многообразия меньшей размерности) с прямым произведением $\Gamma^-\times\Gamma^+$. Тем самым мы вводим в G/H координаты $\xi,\eta\in\mathbb{R}^{n-2}$, назовем их орисферическими координатами. Для этих координат должно выполняться условие $N(\xi,\eta)\neq 0$, где

$$N(\xi,\eta)=1-2\langle\xi,\eta\rangle+\langle\xi,\xi\rangle\langle\eta,\eta\rangle,$$

со стандартным скалярным произведением $\langle\xi,\eta\rangle$ в $\mathbb{R}^{n-2}$. Оператор

$$(A_{\sigma,\varepsilon}f)(\xi)=\int N(\xi,\eta)^{2-n-\sigma,\varepsilon}f(\eta)d\eta,$$

сплетает представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $T_{2-n-\sigma,\varepsilon}$, действующие в функциях на *разных* сечениях. Для оператора $A_{\sigma,\varepsilon}$ справедливо соотношение:

$$A_{2-n-\sigma,\varepsilon}A_{\sigma,\varepsilon}=c^{-1}(\sigma,\varepsilon)E, \tag{1}$$

где $c(\sigma,\varepsilon)$ – некоторая функция, аналитическая по σ.

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$, $\sigma\in\mathbb{C}$, $\varepsilon=0,1$, группы G порождает представление T_σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G (зависимость от ε исчезает), а также представление T_σ универсальной обертывающей алгебры $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ для алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В качестве исходной алгебры $\mathcal{E}$ операторов мы возьмем алгебру

$$\mathcal{E}_\sigma=T_\sigma\big(\mathrm{Env}(\mathfrak{g})\big),$$

образованную операторами $D = T_\sigma(X)$, $X \in \mathrm{Env}(\mathfrak{g})$. В качестве аналога пространства Фока мы берем пространство $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\Gamma^-)$ функций $\varphi(\xi)$ на сечении Γ^- конуса $\mathcal{C}$. Оно содержится в пространстве $C^\infty(\mathbb{R}^{n-2})$ функций $\varphi(\xi)$ на $\mathbb{R}^{n-2}$ и содержит пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-2})$. В качестве переполненной системы мы берем ядро сплетающего оператора $A_{2-n-\sigma,\varepsilon}$, а именно, функцию

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi_{\sigma,\varepsilon}(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)^{\sigma,\varepsilon}.$$

Мы будем также обозначать

$$\Phi^*(\xi,\eta) = \Phi_{\sigma^*,\varepsilon}(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)^{\sigma^*,\varepsilon}, \quad \sigma^* = 2-n-\sigma.$$

Отображению $g \mapsto g^{-1}$ в группе G отвечает следующее отображение $X \mapsto X^\vee$ в алгебре $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ (главный анти-автоморфизм): элементу $X = L_1 L_2 \ldots L_k$, где $L_i \in \mathfrak{g}$, отвечает элемент

$$X^\vee = (-1)^k L_k \ldots L_2 L_1.$$

Отображение $X \mapsto X^\vee$ является анти-инволюцией:

$$(XY)^\vee = Y^\vee X^\vee.$$

Условие сплетаемости дает следующую формулу для $X \in \mathrm{Env}(\mathfrak{g})$:

$$\big\langle\langle T_{\sigma^*}(X^\vee) f, h\rangle\big\rangle = \langle\langle f, T_\sigma(X) h\rangle\rangle.$$

Таким образом, для оператора $D = T_\sigma(X)$ сопряженным относительно формы $\langle\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\rangle$, или относительно меры $d\xi$, является оператор $D^* = T_{\sigma^*}(X^\vee)$:

$$\langle\langle\, D^*\psi, \varphi\,\rangle\rangle = \langle\langle \psi, D\varphi\,\rangle\rangle\,.$$

Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ сплетает представления T_σ и T_{σ^*}:

$$T_{\sigma^*}(X)\, A_{\sigma,\varepsilon} = A_{\sigma,\varepsilon}\, T_\sigma(X).$$

Функция $\Phi(\xi,\eta)$ обладает следующим свойством, назовем его "инвариантностью":

$$\big(T_\sigma(X^\vee) \otimes 1\big)\Phi = \big(1 \otimes T_\sigma(X)\big)\,\Phi\,.$$

В *определении* символов мы отправляемся от формулы (1), которую можно записать в следующем виде

$$\varphi = c \cdot A_{\sigma^*,\varepsilon} A_{\sigma,\varepsilon}\varphi,$$

или, подробно:

$$\varphi(\xi) = c \int \Phi(\xi,v)\,\Phi^*(u,v)\,\varphi(u)\,du\,dv\,, \tag{2}$$

где $c = c(\sigma,\varepsilon)$.

Формула (2) – это воспроизводящая формула, она эквивалентна формуле

$$c \int \Phi(\xi,v) \cdot\, \Phi^*(u,v)\,dv = \,\delta(\xi - u),$$

которая совпадает с формулой (1) – с переменой обозначений, напомним, что $\Phi(\xi,\eta) = \Phi(\eta,\xi)$.

Л е м м а 1. *Функция* $D\varphi$ *выражается через функцию* φ *с помощью одной из двух следующих формул:*

$$(D\varphi)(\xi) = c \int \big((D \otimes 1)\Phi\big)(\xi, v)\ \Phi^*(u, v)\, \varphi(u)\, du\, dv, \tag{3}$$

$$(D\varphi)(\xi) = c \int \Phi(\xi, v) \Big(\big(D^* \otimes 1\big)\Phi^*\Big)(u, v)\, \varphi(u)\, du\, dv. \tag{4}$$

Сравнение с (2) делает естественным появление следующих двух функций F и $F^\natural$:

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{\Phi(\xi, \eta)} \big((D \otimes 1)\Phi\big)(\xi, \eta)\,, \tag{5}$$

$$F^\natural(\xi, \eta) = \frac{1}{\Phi^*(\xi, \eta)} \Big(\big(D^* \otimes 1\big)\Phi^*\Big)(\xi, \eta)\,. \tag{6}$$

С их помощью формулы (3) и (4) перепишутся так:

$$(D\varphi)(\xi) = c \int F(\xi, v)\, \Phi(\xi, v)\, \Phi^*(u, v)\, \varphi(u)\, du\, dv. \tag{7}$$

$$(D\varphi)(\xi) = c \int F^\natural(u, v)\, \Phi(\xi, v)\, \Phi^*(u, v)\, \varphi(u)\, du\, dv. \tag{8}$$

Таким образом, оператору D отвечают две функции F и $F^\natural$: $D \longrightarrow F$ и $D \longrightarrow F^\natural$. Назовем функции F и $F^\natural$ соответственно *ковариантным и контравариантным символами* оператора D и обозначим $\mathrm{co}_\sigma D$ и $\mathrm{contra}_\sigma D$, соответственно. Напомним, что $D = T_\sigma(X)$. Сравнивая (5) и (6), мы видим, что

$$\mathrm{contra}_\sigma D = \mathrm{co}_{\sigma^*} D^*,$$

или

$$\mathrm{contra}_\sigma T_\sigma(X) = \mathrm{co}_{\sigma^*} T_{\sigma^*}(X^\vee),$$

Следующая теорема обращает эти соответствия.

Т е о р е м а 1. *Оператор* D *восстанавливается по своим символам с помощью равенств* (7) *и* (8) . *Следовательно, отображения* co_σ *и* contra_σ *являются взаимно однозначными.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыкина С.В.* Дифференциально-геометрическая структура пара-эрмитовых пространств с псевдоортогональной группой движений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1511–1516.

2. *Tsykina S.V.* Polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces with pseudo-orthogonal group of translations // International workshop "Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics" , Moscow, Aug. 25–30, 2007. V. II. P. 63–71.

3. *Молчанов В.Ф.* Представления псевдо-ортогональной группы, связанные с конусом // Математический сборник. 1970. Т. 91. № 3. С. 358–375.

Поступила в редакцию 24 октября 2016 г.

Цыкина Светлана Викторовна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры функционального анализа, e-mail: tsykinasv@yandex.ru

UDC 517.98
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2093-2097

SYMBOLS IN POLYNOMIAL QUANTIZATION

© **S. V. Tsykina**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: tsykinasv@yandex.ru

We present a new approach to the definition of covariant and contravariant symbols in polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces.
Key words: Lie groups and Lie algebras; pseudo-orthogonal groups; representations of Lie groups; para-Hermitian symmetric spaces; covariant and contravariant symbols; polynomial quantization

REFERENCES

1. *Tsykina S.V.* Differential geometric structure of para-Hermitian symmetric spaces with pseudo-orthogonal group of translations // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences, 2015. V. 20. Iss. 5. P. 1511–1516.
2. *Tsykina S.V.* Polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces with pseudo-orthogonal group of translations // International workshop "Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics", Moscow, Aug. 25–30, 2007. V. II. P. 63–71.
3. *Molchanov V.F.* Representations of the pseudo-orthogonal group associated with a cone // USSR Matem. Sbornik, 1970. V. 91. № 3. P. 358–375.

Received 24 October 2016

Tsykina Svetlana Viktorovna, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Functional Analysis Department, e-mail: tsykinasv@yandex.ru

Информация для цитирования:
Цыкина С.В. Символы в полиномиальном квантовании // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2093-2097. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2093-2097
Tsykina S.V. Simvoly v polinomial'nom kvantovanii [Symbols in polynomial quantization]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Review. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2093-2097. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2093-2097 (In Russian)