Поступила в редакцию 2 июня 2015 г.

Treshchev V.S. WELL-POSED SOLVABILITY OF SYSTEMS OF OPERATOR EQUATIONS WITH VECTOR COVERING MAPPINGS

Conditions of the well-posed solvability of systems of operator equations with vector conditionally covering mappings are obtained.

Key words: vector covering mappings; metric spaces; equation.

Трещёв Валентин Сергеевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: treshchev.math@mail.ru

Treshchev Valentin Sergeyevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Algebra and Geometry Department, e-mail: treshchev.math@mail.ru

УДК 519.87 + 519.722 + 519.213

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ЭНТРОПИЙНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ГАУССОВСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© **А.Н. Тырсин, И.С. Соколова**

Ключевые слова: математическая модель; дифференциальная энтропия; стохастическая система; случайный вектор; нормальное распределение; оптимизация.

Рассмотрены задачи управления гауссовской стохастической системой с помощью увеличения и уменьшения ее дифференциальной энтропии. В качестве модели стохастической системы используется многомерная гауссовская случайная величина.

Использование энтропии при исследовании различных стохастических систем является распространенным [1–4]. Актуальным направлением математического моделирования сложных систем является моделирование таких систем с помощью энтропийных методов. В основе этих методов лежит использование энтропии в качестве критерия оценки функционирования системы. Это обусловлено тем, что энтропия — универсальный параметр, свойственный различным категориям систем, экономическим, биологическим, техническим и др.

Энтропийное моделирование гауссовских стохастических систем состоит в следующем [5]. Представим стохастическую систему S в виде многомерного нормального случайного вектора $\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2,\dots,Y_m)$. Каждый элемент Y_i этого вектора является одномерной гауссовской случайной величиной, которая характеризует функционирование соответствующего элемента исследуемой системы. Элементы могут быть как взаимозависимыми, так и не зависеть друг от друга.

Представим дифференциальную энтропию случайного вектора $\mathbf{Y}$ как [5]

$$H(\mathbf{Y})=\frac{1}{2}\ln[(2\pi e)^m|\mathbf{\Sigma}|]=\sum_{l=1}^{m}H(Y_i)+\frac{1}{2}\ln(|\mathbf{R}|), \tag{1}$$

где $Y_i=\dfrac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma^2_{Y_i})$; $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{R}$ — ковариационная и корреляционная матрицы случайного вектора $\mathbf{Y}$.

Многие авторы отмечают [1, 2, 4, 6], что повышение эффективности функционирования систем можно рассматривать с позиции увеличения или уменьшения ее энтропии. Поэтому энтропийная модель (1) позволяет решать задачи эффективного управления стохастической системой. Увеличение энтропии всей системы можно достичь за счет роста неопределенности (дисперсий) одного или нескольких ее элементов, или уменьшая степень взаимосвязи элементов (увеличение определителя корреляционной матрицы). Уменьшение энтропии системы, наоборот, достигается уменьшением дисперсий ее элементов, или увеличением степени взаимосвязи элементов.

Отметим, что при управлении открытой системой мы располагаем некоторым ресурсом (энергией) для воздействия на систему. Одним из ключевых направлений для эффективного решения подобных задач является известная концепция «точек роста».

В зависимости от цели управления и имеющихся для этого ресурсов можно сформулировать различные задачи изменения энтропии системы [5, 7]: изменение уровня энтропии до ее максимального или минимального значения при имеющихся ограничениях; изменение уровня энтропии в сторону ее увеличения или уменьшения.

Рассмотрим задачи максимизации энтропии стохастической системы.

З а д а ч а 1.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^m|(\mathbf{\Sigma}| + \sigma_U^2 M_{ii})\right] \to \max\limits_{i\in\{1,\ldots,m\}}, \\ \mathrm{cov}(U, Y_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

где M_{ii} — минор матрицы $\mathbf{\Sigma}$; $\sigma_U^2 = C > 0$.

Задача 1 позволит осуществить максимальный прирост энтропии с помощью оптимального выбора соответствующего элемента системы Y_i, к которому прибавляется гауссовская случайная величина U с заданной дисперсией $\sigma_U^2 = C$. Если имеется возможность одновременного воздействия на несколько элементов системы, то задачу 1 можно усложнить.

З а д а ч а 2.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^m|\mathbf{\Sigma}^*|\right] \to \max\limits_{\sigma_{U_i}^2}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sigma_{U_i}^2 = C > 0, \\ \forall i, j\ \mathrm{cov}(U_i, Y_j) = 0, \\ \forall i \neq j\ \mathrm{cov}(U_i, U_j) = 0, \end{cases}$$

где

$$\mathbf{\Sigma}^* = \begin{pmatrix} \sigma_{Y_1}^2 + \sigma_{U_1}^2 & \mathrm{cov}(Y_1, Y_i) & \ldots & \mathrm{cov}(Y_1, Y_m) \\ \mathrm{cov}(Y_2, Y_1) & \sigma_{Y_2}^2 + \sigma_{U_2}^2 & \ldots & \mathrm{cov}(Y_2, Y_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{cov}(Y_m, Y_1) & \mathrm{cov}(Y_m, Y_2) & \ldots & \sigma_{Y_m}^2 + \sigma_{U_m}^2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Задача 2 позволит осуществить оптимальное распределение имеющегося ресурса C между элементами системы Y_i, к которым прибавляются независимые случайные величины U_i. Решение данной задачи нелинейного программирования можно может получить с помощью численных методов.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$, $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \ldots, U_m)$ *— случайные нормально распределенные векторы,* $\mathbf{\Sigma}$ *— ковариационная матрица случайного вектора* $\mathbf{Y}$. *Тогда решение задачи 2 существует, и любой локальный максимум является глобальным.*

З а м е ч а н и е 1. Поскольку система — это взаимосвязанное множество элементов, то в некоторых случаях в задачи 1, 2 следует вводить дополнительные ограничения на коррелированность ее элементов вида $a \leqslant |\mathbf{R}| \leqslant b$, которые позволяют учитывать диапазон возможных значений степени взаимосвязей в системе.

Рассмотрим теперь задачу минимизации энтропии стохастической системы. Исходя из свойств дисперсии случайной величины, ее уменьшение достигается путем деления случайной величины на положительное число. Отметим, что переход к измененной дисперсии $\sigma^2_{Y_i} \to \sigma^2_{Y_i}/x_i$ оставит неизменной корреляционную матрицу. В таком случае имеем задачу, в которой необходимо оптимальным образом уменьшить дисперсию некоторых компонент случайного вектора.

З а д а ч а 3.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^m|\mathbf{R}|\dfrac{\sigma^2_{Y_1}\sigma^2_{Y_2}\dots\sigma^2_{Y_m}}{x_1x_2\dots x_l}\right] \to \min\limits_{x_1,x_2,\dots,x_l}, \\ \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \leqslant W, \\ \forall i\ x_i \geqslant 0, \end{cases}$$

где W — количество имеющегося ресурса для снижения дисперсии, $l = 1, 2, \dots, m$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ *— гауссовский случайный вектор с корреляционной матрицей* $\mathbf{R}$. *Тогда решением задачи 3 является* $x_i = W/l$, *где* l *соответствует максимуму значения* $\max\limits_{l}\left(\frac{W}{l}\right)^l$, $l = 1, 2, \dots, m$.

Однако задача 3, предлагая, по сути, равномерное распределение ресурса между некоторыми или всеми элементами системами, не позволяет явно выделить основные точки воздействия (точки роста) на систему. Поэтому задача минимизации энтропии системы может быть рассмотрена с точки зрения приложения специальных управленческих мероприятий с целью снижения дисперсий, при условии, что при этом изменение $|\mathbf{R}|$ будет пренебрежительно мало.

З а д а ч а 4.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^m|\mathbf{R}|(\sigma^2_{Y_1}-x_1)(\sigma^2_{Y_2}-x_2)\dots(\sigma^2_{Y_m}-x_m)\right] \to \min\limits_{x_1,x_2,\dots,x_m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \leqslant W, \\ \forall i\ 0 \leqslant x_i \leqslant \sigma^2_{Y_i}, \\ |\mathbf{R}| = \mathrm{const}. \end{cases}$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ *— гауссовский случайный вектор с корреляционной матрицей* $\mathbf{R}$. *Тогда решение задачи 4 существует, и любой локальный минимум является глобальным.*

Энтропией системы можно управлять также посредством усиления или ослабления корреляционных связей между компонентами при условии, что при таком воздействии на систему изменение дисперсий элементов будет пренебрежительно мало. Например, в случае необходимости изменения энтропии в сторону ослабления задача примет следующий вид.

З а д а ч а 5.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^m|\mathbf{\Sigma}^*|\right] \to \min\limits_{r_{ij}}, \\ a \leqslant |\mathbf{R}^*| \leqslant b, \\ \mathbf{R}^* \in D, \end{cases}$$

где D — множество положительно определенных корреляционных матриц; $\mathbf{\Sigma}^*$ — ковариационная матрица, определяемая по формуле (2); $\mathbf{R}^*$ — соответствующая корреляционная матрица.

Задачи $1-5$ позволят осуществить управление системой путем воздействия на дисперсии и корреляции элементов системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прангишвили И.В.* Энтропийные и другие системные закономерности: Вопросы управления сложными системами. М.: Наука, 2003.

2. *Вильсон А.Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978.

3. *Зверков О.А., Селиверстов А.В., Любецкий В.А.* Усредненная энтропия как характеристика консервативности участков генома // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2529-2531.

4. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем. М.: Янус-К, 2002.

5. *Тырсин А.Н., Соколова И.С.* Энтропийно-вероятностное моделирование гауссовских стохастических систем // Математическое моделирование. Москва, 2012. Т. 24. № 1. С. 88-102.

6. *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002.

7. *Соколова И.С., Тырсин А.Н.* Использование энтропийно-вероятностного моделирования в задачах мониторинга и управления сложными системами // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Иркутск, 2012. № 4. С. 35-39.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РНФ № 14-18-00574.

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Tyrsin A.N., Sokolova I.S. OPTIMIZATION PROBLEMS IN THE ENTROPIC MODELING OF GAUSSIAN STOCHASTIC SYSTEMS

We reviewed the control problems of a Gaussian stochastic system by using the increase and decrease of its differential entropy. Multivariate Gaussian random variable is used as a mathematical model of a stochastic system.

Key words: mathematical model; differential entropy; stochastic system; random vector; normal distribution; optimization.

Тырсин Александр Николаевич, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская федерация, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики, e-mail: at2001@yandex.ru

Tyrsin Aleksandr Nikolaevich, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Associate Professor, Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: at2001@yandex.ru

Соколова Ирина Сибагатулловна, ООО «Прикладные технологии», г. Челябинск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ведущий специалист, e-mail: kadriya1985@mail.ru

Sokolova Irina Sibagatullovna, LLC «Applied Technologies», Chelyabinsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Specialist, e-mail: kadriya1985@mail.ru