УДК 517.97, 517.988.52

ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

© **А. В. Давыдова, Д. Ю. Карамзин**

Ключевые слова: метрическая регулярность; вариационные системы; условие Робинсона.

Изучаются вариационные системы общего геометрического вида. Доказывается, что условие Робинсона является достаточным для метрической регулярности отображения банахова пространства в евклидово относительно замкнутого подмножества евклидова пространства. Доказательство основано на некоторой модификации вариационного принципа Экланда. Обсуждаются приложения.

Рассмотрим банахово пространство X, евклидово пространство Y, гладкое по Фреше отображение $\varphi : X \to Y$ и замкнутое множество $S \subseteq Y$, которое содержит точку $y = 0$. Пусть $x_* \in X$, $\varphi(x_*) = y_*$. В настоящей работе нас будет интересовать вопрос о существовании решения включения

$$\varphi(x) \in y + S \tag{1}$$

в окрестности точки (x_*, y_*). Включение вида (1) еще называют вариационной системой, поскольку необходимость решать подобного рода задачу приходит к нам из вариационного анализа, в связи, например, с негладким правилом множителей Лагранжа, см. подробнее в [1].

Определение 1. Будем говорить, что функция φ является метрически регулярной в точке x_* относительно множества S, если существуют числа $c, \delta > 0$ такие, что для любых $(x, y) \in B_\delta(x_*) \times B_\delta(y_*)$ имеет место:

$$d(x, \varphi^{-1}(y + S)) \le c \cdot d(\varphi(x), y + S).$$

Здесь $B_\delta(x)$ – шар радиуса δ с центром в x, а $d(x, A)$ – расстояние до множества. Причем расстояние до пустого множества считается равным $+\infty$.

Определение 2. Функция φ удовлетворяет условию Робинсона относительно множества S в точке x_*, если

$$N_S \cap \ker \varphi'^*(x_*) = \{0\}. \tag{2}$$

Здесь N_S – нормальный конус Мордуховича ко множеству S в точке $y = 0$. Если множество S выпуклое, то это определение превращается в классическое определение регулярности по Робинсону, которое говорит, что $T_S + \operatorname{im} \varphi'(x_*) = Y$.

Теорема 1. *Пусть функция φ удовлетворяет условию Робинсона (2) в точке x_*. Тогда φ является метрически регулярной в точке x_* относительно множества S.*

Доказательству теоремы предпошлем некоторый модифицированный вариационный принцип. Смысл нижеследующей леммы состоит примерно в том, что если аргумент задачи распадается на две части, одна из которых конечномерна и ограничена, то возмущать в вариационном принципе достаточно лишь бесконечномерную часть.

Пусть $E=\mathbb{R}^n$, и M – замкнутое подмножество произведения $X\times E$. Элементы M будем обозначать через (x,t), где $x\in X$, $t\in E$. Пусть заданы полунепрерывные снизу и неотрицательные на M функции $f(x):X\to\mathbb{R}^1$ и $r(t):E\to\mathbb{R}^1$. Обозначим $\Phi(x,t):=f(x)+r(t)$.

Лемма 1. *Предположим, что существует такое ограниченное множество* $B\subseteq E$, *что* $M\subseteq X\times B$. *Пусть заданы числа* $\varepsilon,\lambda>0$ *и точка* $(x_0,t_0)\in M$: $\Phi(x_0,t_0)\le\varepsilon$. *Тогда существуют точка* $(x_*,t_*)\in M$, *а также функция* $\psi(x):X\to\mathbb{R}^1_+$ *такие, что:*

a) $\|x_*-x_0\|\le\lambda$;

b) $\Phi(x_*,t_*)\le\Phi(x_0,t_0)$;

c) $\psi(x_0)\le\lambda$, *и* $|\psi(x')-\psi(x'')|\le 2\|x'-x''\|\ \ \forall\, x',x''\in X$; [1]

d) функция $\Phi(x,t)+\frac{\varepsilon}{\lambda}\psi(x)$ *достигает своего абсолютного минимума на множестве* M *в точке* (x_*,t_*).

Доказательство, очевидно, достаточно провести для случая $\lambda=1$, так как общий случай сводится к этому умножением нормы в X на λ^{-1}. Кроме того, его будет удобно провести в конструктивной формулировке, см. [2]. Пусть числа $\alpha_k>0$, $k=0,1,2,..$ таковы, что $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\le\le 1$, и $\alpha_0>\frac{2}{3}$. Положим $\beta_k=\alpha_k^2$ при $k\ge 1$. Заметим, достаточно показать, что найдется последовательность точек $(x_k,t_k)\in M$: $\|x_k-x_0\|\le 1$, $x_k\to x_*$ при $k\to\infty$, и числа $\gamma_0\in[0,1]$, $\gamma_k\in[0,\beta_k]$, $k\ge 1$, такие, что имеет место b) и функция

$$\Pi(x,t):=\Phi(x,t)-\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\xi_k(x)$$

достигает на множестве M минимума в точке (x_*,t_*). Здесь $\xi_k(x)=1-\alpha_k^{-1}\|x-x_k\|$ – так называемая холм-функция, [2]. Действительно, рассмотрев тогда $\psi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\alpha_k^{-1}\|x-x_k\|$ получим все условия a)–d) теоремы.

Положим

$$\gamma_0=\sup\{\gamma\ge 0:\ \Phi(x,t)-\varepsilon\gamma\xi_0(x)\ge 0\ \ \forall\,(x,t)\in M\}.$$

Ясно, что $\gamma_0\le 1$. Действительно, для этого достаточно в выражении выше рассмотреть точку $x=x_0$. Заметим, что если $\gamma_0=1$, то теорема очевидно доказана с $\gamma_k=0$ при $k>0$ и дальнейшие рассуждения уже не нужны. Поэтому ниже будем считать, что $\gamma_0<1$.

Положим $\Phi_1(x,t):=\Phi(x,t)-\varepsilon\gamma_0\xi_0(x)$. Эта функция по определению полунепрерывна снизу и неотрицательна на M. Покажем, что ее нижняя грань на $(B_{\alpha_0}(x_0)\times E)\cap M$ равна нулю. Действительно, если эта грань равна некоторому числу $\kappa>0$, то для всех $(x,t)\in M$: $\|x-x_0\|\le\alpha_0$ имеем

$$\Phi_1(x,t)=\Phi(x,t)+\varepsilon\gamma_0\alpha_0^{-1}\|x-x_0\|-\varepsilon\gamma_0\ge\kappa.$$

Отсюда, поскольку функция Φ неотрицательна, увеличив число γ_0 на $\varepsilon^{-1}\kappa$, получим, что по-прежнему $\Phi_1(x,t)\ge 0$ для всех (x,t) из M. Это однако противоречит определению γ_0.

Если нижняя грань достигается в какой-то точке (x_*,t_*), то снова приходим к утверждению леммы. Если же нижняя грань не достигается, то найдется точка $(x_1,t_1)\in M$:

$$\Phi_1(x_1,t_1)\le\beta_1\varepsilon.$$

Уменьшая при этом, если потребуется, число β_1, добьемся того, чтобы $\Phi(x_1,t_1)\le\Phi(x_0,t_0)$.

[1] Т. е. функция ψ липшицева равномерно в X с константой 2. Эту константу можно уменьшить до любого числа $\kappa>1$.

Повторим всю конструкцию, но заменив Φ на Φ_1, ε на $\beta_1\varepsilon$, α_0 на α_1, x_0 на x_1, t_0 на t_1, и ξ_0 на ξ_1. В итоге найдем векторы $x_2 \in B_{\alpha_1}(x_1)$, $x_3 \in B_{\alpha_2}(x_2)$, и т.д. $x_n \in B_{\alpha_{n-1}}(x_{n-1})$, а также точки $t_1, t_2, .., t_n \in E$, причем $(x_n, t_n) \in M$ при всех n. Последовательность $\{x_n\}$ – это последовательность Коши и в силу полноты X она сходится к некоторому вектору $x_* \in X$. По предположению леммы последовательность $\{t_n\}$ ограничена. Переходя к подпоследовательности, $t_n \to t_*$. В силу замкнутости M имеем $(x_*, t_*) \in M$. Из полунепрерывности снизу функции Φ и того, что $\Phi_n(x_n) \le \beta_n\varepsilon$ следует, что $\Pi(x_*, t_*) \le 0$. Однако функция Π по построению неотрицательна. Поэтому $\Pi(x_*, t_*) = 0$, и точка (x_*, t_*) искомая точка минимума. Легко также проверить, что верно a) и b). Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1. Проведем доказательство от противного. Пусть φ не является метрически регулярной в точке x_*. Тогда для любых $\delta, c > 0$ существуют векторы $x_\delta \in B_\delta(x_*)$, $y_\delta \in B_\delta(y_*)$, которые зависят также и от числа c, что

$$d(x_\delta, \varphi^{-1}(y_\delta + S)) > c \cdot d(\varphi(x_\delta), y_\delta + S). \tag{3}$$

Пусть вектор $\xi_\delta \in S$ таков, что

$$d(x_\delta, \varphi^{-1}(y_\delta + S)) > c \cdot |\varphi(x_\delta) - y_\delta - \xi_\delta|. \tag{4}$$

Этот вектор существует в силу (3) исходя из определения расстояния. Положим $\bar{y}_\delta = \varphi(x_\delta) - - y_\delta - \xi_\delta$. Отметим, что $\bar{y}_\delta \neq 0$ в силу (4). Положим $\varepsilon = \varepsilon(\delta) := |\bar{y}_\delta| > 0$.

Составим экстремальную задачу.

$$\begin{cases} c^{-1}\|x - x_\delta\| + \varepsilon t \to \min, \\ \varphi(x) - t\bar{y}_\delta \in y_\delta + S, \\ x \in X,\ t \in [0, \sigma]. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\sigma > 1$ – произвольное число.

В задаче (5) существует допустимая точка $x = x_\delta$, $t = 1$, а значение минимизируемого функционала на ней равно ε. Применим к задаче (5) лемму 1 рассмотрев в ней:

$$M = \{(x, t) \in X \times [0, \sigma] :\ \varphi(x) - t\bar{y}_\delta \in y_\delta + S\},$$

$(x_0, t_0) = (x_\delta, 1)$ и $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$.

Тогда существуют точка $(x_\delta^*, t_\delta^*) \in M$ и липшицевая с константой 2 функция $\psi : X \to \mathbb{R}^1$ такие, что

1) $\|x_\delta^* - x_\delta\| \le \sqrt{\varepsilon}$;

2) $c^{-1}\|x_\delta^* - x_\delta\| + \varepsilon t_\delta^* \le \varepsilon$;

3) точка (x_δ^*, t_δ^*) является решением задачи

$$\begin{cases} c^{-1}\|x - x_\delta\| + \varepsilon t + \sqrt{\varepsilon}\psi(x) \to \min, \\ \varphi(x) - t\bar{y}_\delta \in y_\delta + S, \\ x \in X,\ t \in [0, \sigma]. \end{cases} \tag{6}$$

Покажем, что

$$t_\delta^* \neq 0. \tag{7}$$

Действительно, иначе было бы

$$\varphi(x_\delta^*) \in y_\delta + S \quad \Rightarrow \quad \|x_\delta^* - x_\delta\| \ge d(x_\delta, \varphi^{-1}(y_\delta + S)).$$

Однако, в силу (4), имеем

$$d(x_\delta, \varphi^{-1}(y_\delta + S)) > c|\bar{y}_\delta| = c\varepsilon.$$

Поэтому минимальное значение функционала в задаче (5) будет строго больше, чем ε, что, однако, невозможно ввиду 2). Поэтому $t^*_\delta > 0$. Ясно также, что в силу 2) будет $t^*_\delta < \sigma$.

Применим к задаче (6) необходимые условия экстремума из [1]. Существуют число $\lambda^0_\delta \geq 0$, вектор $\lambda_\delta \in N_S(\zeta_\delta)$, где $\zeta_\delta = \varphi(x^*_\delta) - t^*_\delta \bar{y}_\delta - y_\delta$, и векторы $a_\delta, b_\delta \in B_1(0)$ такие, что

$$\lambda^0_\delta(c^{-1}a_\delta + 2\sqrt{|y_\delta|} \cdot b_\delta) + \varphi'^*(x^*_\delta)\lambda_\delta = 0, \tag{8}$$

$$\lambda^0_\delta|\bar{y}_\delta| = \langle \lambda_\delta, \bar{y}_\delta \rangle, \tag{9}$$

$$\lambda^0_\delta + |\lambda_\delta| = 1. \tag{10}$$

Здесь, получая условие (9), мы уже учли (7). Из (9), поскольку $\bar{y}_\delta \neq 0$, выводим, что $\lambda^0_\delta \leq |\lambda_\delta|$. Но из (10) $\lambda^0_\delta = 1 - |\lambda_\delta|$. Поэтому

$$|\lambda_\delta| \geq \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Возьмем последовательные пределы при $\delta \to 0$ и потом при $c \to \infty$. Переходя к подпоследовательности, в виду (10) и (11), можно считать, что $\lambda_\delta \to \lambda \neq 0$: $\lambda \in N_S$. Переходя к пределу в (8) при $\delta \to 0$, $c \to \infty$ получим, что $\varphi'^*(x_*)\lambda = 0$, что противоречит условию Робинсона. Поэтому функция φ метрически регулярна относительно S. □

Если предположить, что Y банахово или даже гильбертово, то утверждение теоремы 1 уже неверно. Действительно, с одной стороны, известно, что в банаховых пространствах принцип Лагранжа для задачи условной минимизации функции $f(x)$ при ограничениях $\varphi(x) = 0$ уже неверен, если образ оператора $\varphi'(x_0)$ незамкнут. Здесь x_0 – точка локального минимума. Но с другой стороны, принцип Лагранжа есть следствие теоремы 1.[2] Поэтому теорема 1 неверна для общих отображений φ одного банахова пространства в другое. Более того, даже в предположении замкнутости образа производной, метод доказательства встречает серьезные трудности, когда Y банахово. Эти трудности, которые связаны с потерей компактности, потерей проекции на S и др., вообще говоря, совершенно неясно как преодолевать. По всей видимости, на этом направлении не стоит ожидать какого-либо общего утверждения без дополнительных априорных и жестких предположений на пространство Y и множество S, см. [1].

Обратимся теперь к приложениям. Естественные приложения результатов, подобных теореме 1, лежат в области оптимального управления. Рассмотрим управляемую динамическую систему:

$$\dot{x} = f(x, u), \;\; t \in [0, 1], \;\; x(0) = 0 \in \mathbb{R}^n, \;\; u(\cdot) \in \mathbb{L}_\infty([0, 1]).$$

Пусть S – замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, содержащее нуль, которое может и не иметь гладкой структуры. Например, «еж», полученный объединением всех координатных осей в $\mathbb{R}^n$. На плоскости это будет «крест».

Пусть система обладает состоянием покоя, т.е. нулевым решением $x(t) = 0$ при некотором $u_0(\cdot) \in \mathbb{L}_\infty([0, 1])$.

Представим, что означенный выше «еж» не жестко закреплен в нуле и совершает некоторые колебания в малой окрестности нуля, переходя, соответственно, во множество $y + S$ при малых по норме y. Тогда представляется небезосновательным вопрос о том, а при каком условии мы всегда сможем попасть в «ежа», причем при любом его малом отклонении от нуля y? Такая постановка задачи носит явный инженерный характер. Если ответ на этот вопрос положительный, то система называется локально управляемой относительно S.

Ответ на поставленный вопрос и дается, очевидно, условием Робинсона (2), записанным для отображения $\varphi(u) = x(1) : \mathbb{L}_\infty([0, 1]) \to \mathbb{R}^n$ и множества S. В точке покоя необходимо

[2]Действительно, отображение (f, φ) не может быть метрически регулярным относительно множества $\{f(x_0)\} \times \{0\}$ в точке x_0 в силу свойств локального минимума. Поэтому из теоремы 1 для (f, φ) нарушается условие Робинсона. Однако отрицание этого условия и есть принцип Лагранжа.

вычислить оператор $L = \varphi'(u_0) : \mathbb{L}_\infty([0,1]) \to \mathbb{R}^n$. Известно, что $L\delta u = \delta x(1)$, где $\delta x(t)$ есть решение уравнения в вариациях (линеаризованной системы):

$$\dot{\delta x} = f'_x(0, u_0(t))\delta x + f'_u(0, u_0(t))\delta u, \quad \delta x(0) = 0, \quad \delta u \in \mathbb{L}_\infty([0,1]).$$

Далее необходимо вычислить $\operatorname{im} L$. Пересечение ортогонального дополнения к образу $(\operatorname{im} L)^\perp$ со множеством $N_S(0)$ – т.е. с нормальным конусом к S в нуле (это множество, как правило, легко вычисляется), должно быть тривиально. Тогда в рассмотренной системе будет локальная управляемость относительно S .

Идею доказательства авторы почерпнули из [3], где теорема об обратной функции была выведена через необходимые условия экстремума. Другое доказательство можно найти в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation. Springer, 2005.
2. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Несколько замечаний о вариационных принципах // Мат. заметки. 1997. Т. 61. № 2. С. 305–311.
3. *Арутюнов А.В.* Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 3–26.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 13-01-00494).

Поступила в редакцию 16 сентября 2015 г.

Davydova A.V., Karamzin D.Yu. INVESTIGATION OF GENERAL TYPE VARIATIONAL SYSTEMS

General geometric type variational systems are investigated. It is proved that the Robinson condition is sufficient for metric regularity of a map of a Banach space into a Euclidean space w.r.t. a closed subset of the Euclidean space. The proof is based on a certain modification of the Ekeland variational principle. Some applications are discussed.

Key words: metric regularity; Variational systems; Robinson condition.

Давыдова Анна Викторовна, Российский государственный социальный университет, г. Москва, Российская Федерация, преподаватель кафедры прикладной математики, e-mail: avgorbacheva@inbox.ru

Davydova Anna Viktorovna, Russian State Social University, Moscow, the Russian Federation, Lecturer of the Applied Mathematics Department, e-mail: avgorbacheva@inbox.ru

Карамзин Дмитрий Юрьевич, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: dmitry_karamzin@mail.ru

Karamzin Dmitry Yur'evich, Dorodnicyn Computing Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, e-mail: dmitry_karamzin@mail.ru