УДК 517.977.56

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

© **В.В. Провоторов, Е.Н. Провоторова**

Ключевые слова: начально-краевая задача; распределенные параметры на графе; слабые решения; оптимальное управление; управляемость.

В работе рассматривается задача оптимального управления дифференциальной системой, состояние которой определяется как обобщенное (слабое) решение начально-краевой задачи с распределенными параметрами на графе в пространстве соболевского типа. Воздействие на систему осуществляется в начальный момент времени и является стартовым, наблюдение за состоянием системы осуществляется в конечный момент времени, являясь финальным. При этом выбором пространства состояний обусловлено существование следа функции, описывающей состояние системы при фиксированной временной переменной. Сопряженное состояние системы определяется также обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи с распределенными параметрами на графе с финальным условием. Получены необходимые и достаточные условия существования единственного стартового управления и управляемости дифференциальной системой. Представленные утверждения и результаты носят конструктивный характер и применимы для численного решения рассматриваемых задач оптимального управления.

1. Введение. В работе изучается случай, когда состояние дифференциальной системы с распределенными параметрами на графе определяется как обобщенное (слабое) решение начально-краевой задачи на графе, воздействие на систему осуществляется в начальный момент времени и является стартовым, наблюдение за состоянием системы осуществляется в конечный момент времени, являясь финальным. При этом рассматривается след функции, описывающий состояние системы на графе при фиксированной временной переменной. Сопряженное состояние системы определяется обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи на графе с финальным условием. Получены условия существования единственного стартового управления и управляемости дифференциальной системой. Работа продолжает исследования, приведенные в [1–8].

2. Основные понятия и предложения. Используется произвольный связный ограниченный ориентированный граф, допускающий наличие циклов (петель), при этом сохраняются обозначения, принятые в [9; 10, с. 114]. Обозначим через $\partial\Gamma$ множество граничных узлов ζ, $J(\Gamma)$ — множество внутренних ξ узлов графа Γ и пусть Γ_0 — объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, $\partial\Re$ — множество всех граничных ребер (ребер, содержащих граничные узлы $\zeta\in\partial\Gamma$); $\Gamma_T=\Gamma_0\times(0,T)$ ($\Gamma_t=\Gamma_0\times(0,t)$), $\partial\Gamma_T=\partial\Gamma\times\times(0,T)$ ($\partial\Gamma_t=\partial\Gamma\times(0,t)$). Каждое ребро γ графа Γ ориентировано, параметризуется отрезком $[0,1]$ и параметром $x\in[0,1]$, граничные узлы параметризованы числом 1 [10]. Введем необходимые пространства: $L_p(\Gamma)$ ($p=1,2$) — банахово пространство измеримых на Γ_0 функций с конечной нормой $\|u\|_{L_p(\Gamma)}=(\int\limits_\Gamma u^p(x)dx)^{1/p}$ (аналогично определяются пространства $L_p(\Gamma_T)$, $p=1,2$); $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из $L_2(\Gamma)$, норма в $W_2^1(\Gamma)$ устанавливается скалярным произведением $(u,v)_{W_2^1(\Gamma)}=\int\limits_{\Gamma}\left(u(x)v(x)+\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}\right)dx$; $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}=\int\limits_0^T(\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx)^{1/2}dt$; $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ — пространство функций $u(x,t)\in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по x, принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$, норма в $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ вычисляется соотношением $\|u\|^2_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)}=$ $=\int\limits_{\Gamma_T}\left(u(x,t)^2+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}^2\right)dxdt$.

Пусть далее $V_2(\Gamma_T)$ — множество всех функций $u(x,t)\in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{2,\Gamma_T}\equiv\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(\Gamma_T)}, \tag{1}$$

сильно непрерывные по t в норме $L_2(\Gamma)$, т. е. такие, что $\|u(x,t+\Delta t)-u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)}\to 0$ при $\Delta t\to 0$ равномерно на $[0,T]$.

Рассмотрим билинейную форму

$$\ell(\mu,\nu)=\int\limits_\Gamma\left(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx}+b(x)\mu(x)\nu(x)\right)dx, \tag{2}$$

коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ в (2) — фиксированные измеримые ограниченные на Γ_0 функции, суммируемые с квадратом: $a_*\leqslant a(x)\leqslant a^*$, $|b(x)|\leqslant\beta$, $x\in\Gamma_0$ (a_*,a^*,β — фиксированные положительные постоянные). Из леммы 2 [10, с. 72] следует, что в пространстве $W_2^1(\Gamma)$ есть множество Ω функций $u(x)\in C(\Gamma)$ ($C(\Gamma)$ — пространство непрерывных на Γ функций), удовлетворяющих соотношениям $\sum\limits_{\gamma_j\in R(\xi)}a(1)_{\gamma_j}\frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx}=\sum\limits_{\gamma_j\in r(\xi)}a(0)_{\gamma_j}\frac{du(0)_{\gamma_j}}{dx}$ во всех узлах $\xi\in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ — множество ребер, ориентированных «к узлу ξ», $r(\xi)$ — множество ребер ориентированных «от узла ξ»; через $u(\cdot)_\gamma$ обозначено сужение функции $u(\cdot)$ на ребро γ). Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества функций из Ω обозначим через $W_2^1(a,\Gamma)$. Пространство $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ состоит из элементов, для которых $u\in\Omega$ равны нулю во всех узлах $\zeta\in\partial\Gamma$.

Пусть далее $\Omega_0(a,\Gamma_T)$ — множество функций $u(x,t)\in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t=t_0$ ($t_0\in[0,T]$) как функции класса $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma_j\in R(\xi)}a(1)_{\gamma_j}\frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x}=\sum_{\gamma_j\in r(\xi)}a(0)_{\gamma_j}\frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x} \tag{3}$$

для всех узлов $\xi\in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_0(a,\Gamma_T)$ по норме (1) обозначим через $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$. Если в приведенном определении класс $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ заменить на $W_2^1(a,\Gamma)$, то получим пространство $V_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$: $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)\subset V_2^{1,0}(a,\Gamma_T)\subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$. Другим подпространством пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ является $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ — замыкание в норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям (3) для всех узлов $\xi\in J(\Gamma)$ и для любого $t\in[0,T]$, а также равных нулю вблизи $\partial\Gamma_T$. Отличием элементов пространства $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ ($V_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$) от элементов $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ является отсутствие у последних непрерывности по переменной t, соотношение (3) имеет место почти всюду на $(0,T)$. По мере необходимости будут введены другие пространства и их подпространства с интересующими нас свойствами.

Л е м м а 1. *Справедливы следующие утверждения, связывающие введенные пространства:*

а) $W_{2,0}^1(a,\Gamma_T)$ *плотно в* $L_2(\Gamma_T)$,

б) $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T) \subset W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$, $W_{2,0}^{1}(a,\Gamma_T) \subset W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$,
в) $L_2(\Gamma_T) \subset L_{2,1}(\Gamma_T)$.

Доказательство. Первые два утверждения следуют из самих определений пространств. Пусть далее $f \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, оценим норму $\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}$, используя неравенство Коши-Буняковского: $\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int\limits_0^T (\int\limits_\Gamma f^2(x,t)dx)^{1/2}dt \leqslant \sqrt{T}\sqrt{\int\limits_0^T\int\limits_\Gamma f^2(x,t)dxdt} = \sqrt{T}\|f\|_{L_2(\Gamma_T)}$. Из полученного неравенства $\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} \leqslant \sqrt{T}\|f\|_{L_2(\Gamma_T)}$ вытекает последнее утверждение леммы.

В пространстве $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ рассмотрим спектральную задачу

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + b(x)u(x) = \lambda u(x),$$

т. е. множество таких чисел λ , каждому из которых соответствует по крайней мере одно нетривиальное решение $u(x) \in W_{2,0}^1(a,\Gamma)$, удовлетворяющее тождеству $\ell(u,\eta) = \lambda(u,\eta)$ при любом $\eta(x) \in W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ (здесь и всюду ниже через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$). Последнее соотношение выражает тот факт, что $u(x)$ есть обобщенная собственная функция класса $W_2^1(\Gamma)$ задачи

$$-\tfrac{d}{dx}\left(a(x)\tfrac{du(x)}{dx}\right) + b(x)u(x) = \lambda u(x), \;\; u(x)|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{4}$$

а λ — соответствующее ей собственное значение [9, 11]. При этом собственные значения вещественные и имеют конечную кратность, их можно занумеровать в порядке возрастания модулей с учетом кратностей: $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$; соответственно нумеруется и множество собственных функций: $\{u_n(x)\}_{n\geqslant 1}$.

Теорема 1 [9]. *Система обобщенных собственных функций* $\{u_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ *образует ортогональный базис в пространстве* $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ *(и в пространстве* $L_2(\Gamma)$ *в силу плотности* $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ *в* $L_2(\Gamma)$ *).*

Замечание. Утверждение теоремы остается справедливым и для спектральной задачи (4), где краевое условие заменено на $\frac{du(x)}{dx} + \sigma u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$ (постоянная σ своя для каждого граничного узла графа Γ — замечание 2 к теореме 2); обобщенная собственная функция в этом случае принадлежит пространству $W_2^1(\Gamma)$ и удовлетворяет тождеству

$$\ell(u,\eta) + \sum_{\zeta\in\partial\Gamma}\sigma u\eta = \lambda(u,\eta)$$

при любом $\eta(x) \in W_2^1(a,\Gamma)$ (λ — собственное значение).

Далее рассмотрим эволюционную задачу с распределенными параметрами на графе и соответствующие ей задачи управления в пространствах $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ и $V_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$ (пространства состояний): $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ используется при анализе 1-й краевой задачи, $V_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$ — 2-й и 3-й краевых задач. При этом пространство допустимых управлений (пространство стартовых условий) $\mathbb{U} = L_2(\Gamma)$.

3. Начально-краевая задача, однозначная разрешимость. Рассмотрим уравнение в области Γ_T

$$\tfrac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \tfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\tfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)y(x,t) = f(x,t), \tag{5}$$

представляющее собой систему дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на каждом ребре γ графа Γ . Состояние системы (5) в области $\overline{\Gamma}_T$ определяется решением $y(x,t)$ уравнения (5), удовлетворяющим соотношениям (3), начальным и краевым условиям

$$y\,|_{t=0} = v(x), \quad x \in \Gamma, \tag{6}$$

$$y\,|_{x\in\partial\Gamma}=0, \quad 0<t<T; \tag{7}$$

выбор функций $v(x)$ в (6) определяет стартовые условия начально-краевой задачи (5)–(7). Предположения относительно функций $a(x)$, $b(x)$ остаются теми же, что и в п. 2; $f(x,t)\in\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $v(x)\in L_2(\Gamma)$.

О п р е д е л е н и е 1. Обобщенным (слабым) решением класса $V_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$ начально-краевой задачи (5)–(7) называется функция $y(x,t)\in V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma} y(x,t)\eta(x,t)dx+\int\limits_{\Gamma_t}\left(-y(x,t)\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)dxdt+\ell_t(y,\eta)=\\ =\int\limits_{\Gamma} v(x)\eta(x,0)dx+\int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt\end{gathered} \tag{8}$$

для любой $\eta(x,t)\in W_{2,0}^{1}(a,\Gamma_T)$ и при любом $t\in[0,T]$; $\ell_t(y,\eta)$ — билинейная форма, определенная соотношением

$$\ell_t(y,\eta)=\int\limits_{\Gamma_t}\left(a(x)\tfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}+b(x)y(x,t)\eta(x,t)\right)dxdt.$$

О п р е д е л е н и е 2. Обобщенным (слабым) решением класса $W_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$ начально-краевой задачи (5)–(7) называется функция $y(x,t)\in W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_T}\left(-y(x,t)\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)dxdt+\ell_T(y,\eta)=\\ =\int\limits_{\Gamma} v(x)\eta(x,0)dx+\int\limits_{\Gamma_T} f(x,t)\eta(x,t)dxdt\end{gathered} \tag{9}$$

для любой $\eta(x,t)\in W_{2,0}^{1}(a,\Gamma_T)$, равной нулю при $t=T$.

Вначале докажем разрешимость задачи (5)–(7) в пространстве $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$, затем покажем, что каждое такое решение фактически принадлежит пространству $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$. Завершим исследование анализом задачи стартового управления системой (5) в пространствах $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$, $V_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Т е о р е м а 2. *Начально-краевая задача* (5)–(7) *имеет по крайней мере одно обобщенное решение в пространстве* $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения 2 вытекает, что множество обобщенных решений задачи (5)–(7) линейно. Возьмем систему обобщенных собственных функций $\{u_n(x)\}_{n\geqslant 1}\subset\subset W_{2,0}^{1}(a,\Gamma)$, ортонормальную в $L_2(\Gamma)$ (последнее возможно из-за $W_{2,0}^{1}(a,\Gamma)\subset L_2(\Gamma)$ и утверждения теоремы 1). Будем искать приближенные решения $y^N(x,t)$ в виде $y^N(x,t)==\sum\limits_{i=1}^{N}c_i(t)u_i(x)$ ($c_i^N(t)$ — абсолютно непрерывные на $[0,T]$ функции: $c_i'(t)\in L_2(0,T)$) из системы соотношений

$$\left(\tfrac{\partial y^N}{\partial t},u_i\right)+\int\limits_{\Gamma}\left(a(x)\tfrac{\partial y^N(x,t)}{\partial x}\tfrac{du_i(x)}{dx}+b(x)y^N(x,t)u_i(x)\right)dx=(f,u_i),\ i=\overline{1,N} \tag{10}$$

и равенств

$$c_i^N(0)=(v,u_i),\ i=\overline{1,N}. \tag{11}$$

Соотношения (10), (11) суть задача Коши на интервале $[0,T)$ для системы N линейных дифференциальных уравнений относительно $c_i^N(t)$ ($i=\overline{1,N}$). Так как свободные члены являются суммируемыми функциями на $(0,T)$ ($f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$), N-матрица

$\|(u_i, u_j)\|$ — неособенная, то задача Коши (10), (11) имеет единственное решение $c_i^N(t)$ ($i = \overline{1, N}$).

Получим оценки для $y^N(x,t)$, не зависящие от N . Умножив соотношение (10) на $c_i(t)$, просуммировав по $i = \overline{1, N}$ и интегрируя по t от 0 до $t \leqslant T$, получим равенство

$$\frac{1}{2}\|y^N(x,t)\|^2_{L_2(\Gamma)} + \int\limits_{\Gamma_t} \left(a(x)(\frac{\partial y^N(x,t)}{\partial x})^2 + b(x)(y^N(x,t))^2 \right) dxdt = \\ = \frac{1}{2}\|y^N(x,0)\|^2_{L_2(\Gamma)} + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t) y^N(x,t) dxdt,$$

называемое в литературе (см., например, [12, с. 161]) уравнением энергетического баланса. Для него справедливы оценки

$$\frac{1}{2}\|y^N(x,t)\|^2_{L_2(\Gamma)} + a_*\|\frac{\partial y^N}{\partial x}\|^2_{L_2(\Gamma_t)} \leqslant \beta\|y^N\|^2_{L_2(\Gamma_t)} + \\ + \frac{1}{2}\|y^N(x,0)\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)} \underset{0\leqslant\tau\leqslant t}{max} \|y^N(x,\tau)\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Далее, учитывая $\|y^N\|^2_{L_2(\Gamma_t)} = \int\limits_0^t \|y^N(x,t)\|^2_{L_2(\Gamma)} dt \leqslant \; t \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} \|y^N(x,\tau)\|_{L_2(\Gamma)}$, находим оценку при $t \in [0,T]$:

$$\|y^N(x,t)\|^2_{L_2(\Gamma)} + 2a_*\|\frac{\partial y^N}{\partial x}\|^2_{L_2(\Gamma_t)} \leqslant \\ \leqslant 2\beta t z^2(t) + z(t)\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)} + 2z(t)\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)},$$

здесь $\|y^N\|^2_{L_2(\Gamma_t)}$ заменено на $tz^2(t)$, $\|y^N(x,0)\|^2_{L_2(\Gamma)}$ — на $z(t)\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)}$ и $z(t) = \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t} \|y^N(x,\tau)\|_{L_2(\Gamma)}$. Отсюда вытекают два неравенства

$$z^2(t) \leqslant J(t), \; \|\frac{\partial y^N}{\partial x}\|^2_{L_2(\Gamma_t)} \leqslant \frac{1}{2a_*} J(t) \\ (J(t) = 2\beta t z^2(t) + z(t)\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)} + 2z(t)\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)}),$$

из которых следует оценка

$$\|y^N\|_{2,\Gamma_t} = z(t) + \|\frac{\partial y^N}{\partial x}\|_{L_2(\Gamma_t)} \leqslant (1 + \frac{1}{\sqrt{2a_*}}) J^{1/2}(t) \leqslant \\ \leqslant (1 + \frac{1}{\sqrt{2a_*}}) \left(\sqrt{2\beta t}\|y^N\|_{2,\Gamma_t} + \left(\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)} + 2\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)}\right)^{1/2} \|y^N\|^{1/2}_{2,\Gamma_t} \right)$$

или для $t = t^* < \frac{a_*}{\beta(1+\sqrt{2a_*})^2}$

$$\|y^N\|_{2,\Gamma_t} \leqslant \left(1 - (1 + \frac{1}{\sqrt{2a_*}})\sqrt{2\beta t} \right)^{-2} \left(\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)} + 2\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)} \right). \tag{12}$$

Представим отрезок $[0,T]$ в виде объединения отрезков, имеющих длину, меньшую t^* . Для каждого из этих отрезков справедлива оценка (12), значит, учитывая соотношение $\|y^N\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \|y^N\|_{2,\Gamma_t}$ для любого t , получим неравенство

$$\|y^N\|_{2,\Gamma_t} \leqslant C(t) \left(\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)} + 2\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)} \right), \tag{13}$$

справедливое для $t \in [0,T]$. Функция $C(t)$, $t \in [0,T]$ определяется величиной T и зависит от постоянных a^* , β . Учитывая (11), имеем $\|y^N(x,0)\|_{L_2(\Gamma)} = \|\sum\limits_{i=1}^N (v,u_i)u_i(x)\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^N |(v,u_i)|} \leqslant \|v\|_{L_2(\Gamma)}$ откуда и из неравенства (13) следует

$$\|y^N\|_{2,\Gamma_t} \leqslant C(t) \left(\|v\|_{L_2(\Gamma)} + 2\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_t)} \right) \tag{14}$$

и в силу ограниченности функции $C(t)$ на $[0,T]$ вытекает оценка

$$\|y^N\|_{2,\Gamma_T} \leqslant C^* \tag{15}$$

с независящей от N постоянной C^*.

Рассмотрим последовательность $\left\{y^N\right\}_{N\geqslant 1}$ с ограниченными в совокупности элементами y^N, как это следует из неравенств (15). Из последовательности $\left\{y^N\right\}_{N\geqslant 1}$ можно выделить подпоследовательность $\left\{y^{N_k}\right\}_{k\geqslant 1}$, слабо сходящуюся по норме $W_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$ к некоторому элементу $y \in W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ ($\left\{y^{N_k}\right\}_{k\geqslant 1}$ слабо сходится в $L_2(\Gamma_T)$ вместе с $\frac{\partial y^{N_k}}{\partial x}$ к y). Остается показать, что элемент $y(x,t)$ является решением задачи (5)–(7). Умножим соотношение (10) на абсолютно непрерывную на $[0,T]$ функцию $d_i(t)$ ($d_i(T)=0$), просуммируем по $i=\overline{1,N}$, результат проинтегрируем по t от 0 до T. После интегрирования первого слагаемого по частям по t получим тождество

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_T}\left(-y^N(x,t)\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t}\right)dxdt+\ell_T(y^N,Y)=\\=\int\limits_{\Gamma}y^N(x,0)Y(x,0)dx+\int\limits_{\Gamma_T}f(x,t)Y(x,t)dxdt,\end{gathered} \tag{16}$$

где $Y(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{N}d_i(t)u_i(x)$. Обозначим через Σ множество всех функций $Y(x,t)$ с произвольными $d_i(t)$, обладающими указанными выше свойствами, и произвольными натуральными N. Множество Σ плотно в подпространстве функций, принадлежащих $W_{2,0}^1(a,\Gamma_T)$ и равных нулю при $t=T$. Это следует из плотности множества $\{u_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ в $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$, непрерывности $Y(x,t)\in\Sigma$ по $t\in[0,T]$ и $Y(x,t)\in W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ для каждого фиксированного $t\in[0,T]$. Зафиксируем в (16) функцию $Y(x,t)=Y^*(x,t)\in\Sigma$ ($Y^*(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{N^*}d_i^*(t)u_i(x)$) и по выбранной выше подпоследовательности $\left\{y^{N_k}\right\}_{k\geqslant 1}$ перейдем к пределу, начиная с номера $N_k\geqslant N^*$. В результате получим соотношение (9) для предельной функции $y(x,t)$ при $\eta(x,t)=Y^*(x,t)$, значит, в силу плотности множества Σ в подпространстве функций, принадлежащих $W_{2,0}^1(a,\Gamma_T)$ и равных нулю при $t=T$, $y(x,t)$ — обобщенное решение из $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ начально-краевой задачи (5)–(7). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Краевое условие (7) может быть неоднородным: $y(x,t)=\phi(x,t)$, $x\in\partial\Gamma$, $0<t<T$ ($\phi(x,t)\,|_{x\in\zeta}=\phi_\zeta(t)$ для каждого узла $\zeta\in\partial\Gamma$) и доказательство теоремы дословно повторяет приведенные рассуждения. При этом предварительно вводится новая неизвестная функция $U(x,t)=y(x,t)-\Phi(x,t)\in W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая однородному краевому условию, здесь $\Phi(x,t)$ – произвольная функция из $L_2(\Gamma_T)$, имеющая обобщенную производную $\frac{\partial\Phi}{\partial x}\in L_2(\Gamma_T)$ и удовлетворяющая (почти всюду) лишь неоднородному краевому условию. Правая часть уравнения (5) для $U(x,t)$ принимает вид $F(x,t)==f(x,t)-b\Phi-\frac{\partial\Phi_x}{\partial x}$, в правой части соотношения (9) определения 2 для обобщенного решения $U(x,t)$ добавляется слагаемое $-\int\limits_{\Gamma_T}b(x)\Phi(x,t)\eta(x,t)dxdt+\int\limits_{\Gamma_T}a(x)\Phi_x(x,t)\eta_x(x,t)dxdt$.

З а м е ч а н и е 2. Утверждение теоремы остается справедливым и для начально-краевой задачи со смешанными краевыми условиями: условие (7) заменяется на

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}+\sigma y(x,t)|_{\partial\Gamma}=0$$

(постоянная σ своя для каждого граничного ребра γ: $\sigma=\sigma_\gamma$, $\gamma\subset\partial\Re$). Обобщенное решение $y(x,t)$ такой начально-краевой задачи определяется в пространстве $W_2^{1,0}(a,\Gamma_T)$

и удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Gamma_T}\left(-y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)dxdt+\ell_T(y,\eta)+\sum_{\gamma\in\partial\Re}\sigma_\gamma\int\limits_0^T y(x,t)\eta(x,t)|_{x=1\in\gamma}dt=$$
$$=\int\limits_\Gamma v(x)\eta(x,0)dx+\int\limits_{\Gamma_T}f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

для любой $\eta(x,t)\in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$, равной нулю при $t=T$; обобщенные собственные функции принадлежат пространству $W^1_2(a,\Gamma)$ и удовлетворяют тождеству, приведенному в замечании к теореме 1.

Покажем далее, что обобщенное решение задачи (5)–(7) является элементом пространства $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$, при каждом фиксированном $t\in[0,T]$ принадлежит пространству $W^1_{2,0}(a,\Gamma)$ и непрерывно зависит от t в норме $W^1_{2,0}(a,\Gamma)$, а значит, и в норме $L_2(\Gamma)$.

Для анализа используем метод Фурье и систему обобщенных собственных функций задачи (4), плотную в $W^1_{2,0}(a,\Gamma)$ и ортонормированную в $L_2(\Gamma)$ (теорема 1).

Рассмотрим ряд

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\lambda_nt}u_n(x),\ a_n=\int\limits_\Gamma v(x)u_n(x)dx \tag{17}$$

($\{\lambda_n\}_{n\geqslant1}$ — множество собственных значений задачи (4)). Отметим, что сумма любого из его конечных отрезков есть обобщенное решение системы (5), удовлетворяющее краевому условию (7). Дальнейшее заключается в исследовании характера сходимости ряда (17), которое основано на анализе норм $\|y(x,t)\|_{L_2(\Gamma)}$, $\|y_t(x,t)\|_{L_2(\Gamma)}$ ($t\in[0,T]$) (см. также [12, .180]) :

$$\|y(x,t)\|^2_{L_2(\Gamma)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2e^{-2\lambda_nt},\ \|y_t(x,t)\|^2_{L_2(\Gamma)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\lambda_n^2e^{-\lambda_nt}. \tag{18}$$

В силу $v(x)\in L_2(\Gamma)$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\|v(x)\|^2_{L_2(\Gamma)}$, и ряды, стоящие в правых частях (18), равномерно сходятся относительно $t\in[0,T]$. Значит, сумма $y(x,t)$ ряда (17) является обобщенным решением задачи (5)–(7) из пространства $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$. Действительно, из указанной сходимости следует, что функция $y(x,t)$ принадлежит $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$ и удовлетворяет интегральному тождеству (8). Последнее вытекает из следующего: сумма $y^N(x,t)$ первых N членов ряда (17) удовлетворяет этому тождеству с функцией $v(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}a_nu_n(x)$ и в нем можно перейти к пределу при $N\to\infty$.

Далее пусть λ_0 такое, что $\lambda_0<\lambda_0^*=\min\{-\beta,\lambda_1\}$. Для скалярного произведения $[\mu,\nu]=\ell(\mu,\nu)-\lambda_0(\mu,\nu)$ в $L_2(\Gamma)$ получаем $[u_n,u_m]=\ell(u_n,u_m)-\lambda_0(u_n,u_m)=(\lambda_n-\lambda_0)\delta_n^m$ (δ_n^m — символ Кронекера), значит,

$$[y(x,t),y(x,t)]=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\lambda_0)a_n^2e^{-2\lambda_nt}. \tag{19}$$

Так как $(\lambda_n-\lambda_0)e^{-2\lambda_nt}\leqslant\alpha(t)$ ($n=1,2,\ldots$), где $\alpha(t)=\sup\limits_{\lambda\in[\lambda_0,+\infty)}(\lambda-\lambda_0)e^{-2\lambda_nt}$ является ограниченной функцией на любом отрезке $[\varepsilon,T]$ ($\varepsilon>0$), то в силу соотношения (19) обобщенное решение $y(x,t)$ есть элемент пространства $W^1_{2,0}(a,\Gamma)$ при любом $t\in(0,T]$ и непрерывно зависит от t в норме $W^1_{2,0}(a,\Gamma)$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 3. *Обобщенное решение* $y(x,t)\in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$ *начально-краевой задачи* (5)–(7) *при любом* $t\in(0,T]$ *принадлежит пространству* $W^1_{2,0}(a,\Gamma)$ *и непрерывно зависит от* t *в норме* $W^1_{2,0}(a,\Gamma)$.

Покажем, что задача (5)–(7) не может иметь два различных решения. По выбранной в теореме 2 подпоследовательности $\left\{y^{N_k}\right\}_{k\geqslant 1}$ перейдем к пределу в неравенстве (14), начиная с номера $N_k \geqslant N^*$. Учитывая не зависящую от номера N оценку (15) для $y^{N_k}(x,t)$, получим

$$\|y(x,t)\|_{2,\Gamma_T} \leqslant C^* \left(\|v\|_{L_2(\Gamma)} + 2\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}\right). \tag{20}$$

Пусть $y_1, y_2 \in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$ – два различных решения задачи (5)-(7), тогда $y = y_1 - y_2 \in$ $\in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$ — решение задачи (5)–(7) с нулевыми исходными данными: $f = 0, v = 0$. Неравенство (20) завершает доказательство следующего утверждения:

Т е о р е м а 4. *Начально-краевая задача* (5)–(7) *имеет единственное обобщенное решение* $y(x,t) \in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$, *непрерывно зависящее от исходных данных* $f(x,t)$ *и* $v(x)$.

З а м е ч а н и е. Доказательство единственности обобщенного решения в пространстве $V^{1,0}_{2}(a,\Gamma_T)$ ничем не отличается от приведенного выше. При этом следует учесть замечание 2 к теореме 2, а также заменить в определении 1 пространство $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$ на $V^{1,0}_{2}(a,\Gamma_T)$ и соотношение (8) на

$$\int\limits_{\Gamma} y(x,t)\eta(x,t)dx + \int\limits_{\Gamma_t} \left(-y(x,t)\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)dxdt + \ell_t(y,\eta) +$$
$$+\sum_{\gamma\in\partial\Re}\sigma_\gamma \int\limits_0^t y(x,t)\eta(x,t)|_{x=1\in\gamma}dt = \int\limits_{\Gamma} v(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

для любой $\eta(x,t) \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$ и при любом $t \in [0,T]$.

Далее для дифференциальной системы (5) рассмотрим задачи стартового управления в пространстве состояний, определяемом каждым из пространств $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$ и $V^{1,0}_{2}(a,\Gamma_T)$.

4. Стартовое управление. Остановимся на анализе задачи управления в пространстве состояний $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$ (анализ в пространстве $V^{1,0}_{2}(a,\Gamma_T)$ аналогичен). Состояние $y(x,t) \in$ $\in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$ системы (5), определяемое как обобщенное решение задачи (5)–(7) с начальным условием $v(x) \in \mathbb{U}$, очевидно, зависит от функции $v(x)$, являющейся стартовым состоянием системы (5)–(7). Поэтому всюду ниже обозначение $y(x,t)$ будет заменено на $y(v)(x,t)$.

Пусть $C : V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T) \to L_2(\Gamma)$ — линейный непрерывный оператор (*оператор наблюдения,* $L_2(\Gamma)$ *— пространство наблюдений*), для определенности будем считать, что наблюдением является $y(v)(x,T)$ ($Cy(v)(x,t) = y(v)(x,T)$), называемое финальным (см., например, [13, с. 119]), возможны и иные типы наблюдений; $J(v)$ — функционал, требующий минимизации на выпуклом замкнутом множестве $\mathbb{U}_\partial \subset \mathbb{U}$, имеет вид

$$J(v) = \|y(v)(x,T) - z_0(x)\|^2_{L_2(\Gamma)} + (Nv,v)_{\mathbb{U}},$$

где $N : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ — линейный непрерывный эрмитов оператор, $(Nv,v)_{\mathbb{U}} \geqslant \varsigma\|v\|_{\mathbb{U}}$ ($\varsigma > 0$ — фиксированная постоянная); $z_0(x) \in L_2(\Gamma)$ — заданное наблюдение. Присутствие слагаемого $(Nv,v)_{\mathbb{U}}$ в представлении функционала $J(v)$ гарантирует коэрцитивность квадратичной компоненты функционала $J(v)$ [10, с. 158].

Задача стартового управления системой (5) состоит в отыскании $\min\limits_{v\in\mathbb{U}_\partial} J(v)$. Элемент $v^* \in \mathbb{U}_\partial$ назовем оптимальным управлением системы (5), если он доставляет минимум функционалу $J(v)$ на множестве $\mathbb{U}_\partial$.

Т е о р е м а 5. *Задача стартового управления системой* (5) *по стартовым состояниям* $v(x) \in \mathbb{U}$ *имеет единственное решение* $v^* \in \mathbb{U}_\partial$, *т. е.*

$$J(v^*) = \min_{v\in\mathbb{U}_\partial} J(v).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждения теоремы 4 линейное отображение $v \to y(v)$ пространства стартовых состояний $\mathbb{U}$ в пространство состояний $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ системы (5) непрерывно. Функционал $J(v)$ определяется с помощью следующих операторов: 1) оператора $v \to y(v)$ перехода от стартового состояния v к состоянию $y(v)$ системы (5), 2) оператора $y(v) \to Cy(v)$ перехода от состояния $y(v)(x,t)$ к наблюдению $Cy(v) = = y(v)(x,T)$.

Преобразуем функционал $J(v)$ к такому виду:

$$J(v) = \|C[y(v) - y(0)] + Cy(0) - z_0\|^2_{L_2(\Gamma)} + (Nv, v)_{\mathbb{U}} =$$

$$= \pi(v, v) - 2l(v) + \|Cy(0) - z_0\|^2_{L_2(\Gamma)},$$

где

$$\pi(u, v) = (C[y(v) - y(0)], C[y(v) - y(0)]) + (Nu, v)_{\mathbb{U}},$$
$$l(v) = (z_0 - Cy(0), C[y(v) - y(0)]).$$

Доказательство завершается применением утверждения теоремы 1.1 [13, с. 13], при этом учитывается очевидное неравенство $\|Cy(0) - z_0\|^2_{L_2(\Gamma)} \geqslant 0$.

5. Соотношения, определяющие управление. Предварительно докажем вспомогательное утверждение для состояний $y(v) \in V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Л е м м а 2. *Для любых* $v, u \in \mathbb{U}_\partial$ *имеет место соотношение*

$$y'(u)(v - u) = y(v) - y(u), \tag{21}$$

в котором $y'(u)$ *— производная по стартовому состоянию* $u(x)$ *функции состояния* $y(u)(x,t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С одной стороны из соотношения (8) ($t = T$) для произвольных фиксированных $v, u \in \mathbb{U}_\partial$ вытекает

$$\begin{gathered}\int\limits_\Gamma [y(v)(x,T) - y(u)(x,T)]\, \eta(x,T) dx + \\ + \int\limits_{\Gamma_T} \left(- [y(v)(x,t) - y(u)(x,t)]\, \tfrac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \right) dx dt + \ell_T(y(v) - y(u), \eta) = 0\end{gathered} \tag{22}$$

для любой $\eta(x,t) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$. С другой стороны, соотношение (8) ($t = T$) дает

$$\begin{gathered}\int\limits_\Gamma [y(u + \theta(v - u))(x,T) - y(v)(x,T)]\, \eta(x,T) dx + \\ + \int\limits_{\Gamma_T} \left(- [y(u + \theta(v - u))(x,t) - y(v)(x,t)]\, \tfrac{\partial \eta_t(x,t)}{\partial t} \right) dx dt + \\ + \ell_T\left(y(u + \theta(v - u)) - y(v), \eta\right) = 0\end{gathered}$$

для любой $\eta(x,t) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$. Деля обе части полученного соотношения на θ и вычисляя предел при $\theta \to 0$, приходим к соотношению

$$\begin{gathered}\int\limits_\Gamma y'(u)(x,T) \eta(x,T) dx + \\ + \int\limits_{\Gamma_T} \left(-y'(u)(x,t)\, [v(x) - u(x)]\, \tfrac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \right) dx dt + \\ + \ell_T(y'(u)\, [v(x) - u(x)]\, , \eta) = 0\end{gathered} \tag{23}$$

для любой $\eta(x,t) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$.

Сравнивая левые части соотношений (22) и (23), учитывая принадлежность $y'(u)$ пространству $L_2(\Gamma_T)$, плотность $W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$ в пространстве $L_2(\Gamma_T)$ (лемма 1), а также произвольность $\eta \in W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$, получаем соотношение (21). Лемма доказана.

Т е о р е м а 6. *Для того чтобы элемент* $u(x,t) \in \mathbb{U}_\partial$ *был оптимальным управлением системы* (5), *необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения*:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma} y(u)(x,t)\eta(x,t)dx + \\ + \int\limits_{\Gamma_t} \left(-y(u)(x,t)\frac{\partial\eta_t(x,t)}{\partial t}\right) dxdt + \ell_t(y(u)(x,t),\eta(x,t)) = \\ = \int\limits_{\Gamma} u(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt \\ (\forall t \in [0,T], \forall \eta(x,t) \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)),\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma}(y(u)(x,T) - z_0(x))(y(v)(x,T) - y(u)(x,T))dx + \\ + (Nu, v-u)_{\mathbb{U}} \geqslant 0 \quad (\forall v \in \mathbb{U}_\partial),\end{gathered} \tag{25}$$

где $y(u) \in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с утверждением теоремы 1.3 [13, с. 18] требуется показать, что неравенство (25) равнозначно неравенству $J'(u)(\nu - u) \geqslant 0$ для любого $v \in \mathbb{U}_\partial$. Исходя из представления функционала $J(v)$, получим ($Cy(v)(x,t) = y(v)(x,T)$)

$$\begin{gathered}J(u+\theta(v-u)) - J(u) = \\ = (Cy(u+\theta(v-u)) - z_0, Cy(u+\theta(v-u)) - z_0) + \\ + (N(u+\theta(v-u)), u+\theta(v-u))_{\mathbb{U}} - \\ - (Cy(u) - z_0, Cy(u) - z_0) - (Nu,u)_{\mathbb{U}},\end{gathered}$$

откуда вытекает

$$\begin{gathered}J(u+\theta(v-u)) - J(u) = \\ = (Cy(u+\theta(v-u)) + Cy(u), C[y(u+\theta(v-u)) - y(u)]) - \\ - 2(z_0, C[y(u+\theta(v-u)) - y(u)]) + 2(Nu, v-u)_{\mathbb{U}}.\end{gathered}$$

Деля последнее соотношение на θ, переходя к пределу при $\theta \to 0$ и учитывая соотношение (21), получаем

$$J'(u)(\nu - u) = 2(Cy(u) - z_0, C(y(u) - y(v))) + 2(Nu, v-u)_{\mathbb{U}},$$

откуда и из (25) следует неравенство $J'(u)(\nu - u) \geqslant 0$; соотношение (24) очевидно. Теорема доказана.

Введем сопряженное состояние $\omega(v)(x,t)$ системы (5) ($y(u) \in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$), удовлетворяющее условиям (3) во всех внутренних узлах графа Γ, как обобщенное решение начально-краевой задачи

$$-\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)\omega(x,t) = 0, \tag{26}$$

$$\omega\mid_{t=T} = y(v)(x,T) - z_0(x), \quad x \in \Gamma, \tag{27}$$

$$\omega\mid_{x\in\partial\Gamma} = 0, \quad 0 < t < T. \tag{28}$$

О п р е д е л е н и е 3. Обобщенным решением задачи (26)–(28) *называется функция* $\omega(v)(x,t) \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$, $\omega(v)(x,T) = y(v)(x,T) - z_0(x)$, *удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$-\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial\omega(v)(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \ell_T(\omega(v),\zeta) = 0 \tag{29}$$

для любых функций $\zeta(x,t) \in W^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$.

Неравенство (25) можно преобразовать с помощью сопряженного состояния $\omega(v)$ системы (5), используя симметричность формы $\ell_T(\mu,\nu)$ и свойство пространства $W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$

сопряженных состояний $\omega(v)$: на любом сечении Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0,T]$) существует след функции $\omega(v)(x,t) \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$, как элемент $W^1_{2,0}(a,\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$, причем этот след непрерывно зависит от $t \in [0,T]$, как от параметра, в норме пространства $L_2(\Gamma)$ [10, с. 117; 13, с. 70]. Неравенство (25) можно переписать так:

$$(\omega(v)(x,T), y(v)(x,T) - y(u)(x,T)) + (Nu, v-u)_{\mathbb{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}_\partial. \tag{30}$$

Пусть $y(v)(x,t)$ — решение (8), $y(u)(x,t)$ — решение (8) при $v = u$, тогда для $\eta(x,t) = \omega(u)(x,t)$

$$\begin{gathered}\int\limits_\Gamma \left([y(v)(x,T) - y(u)(x,T)]\omega(u)(x,T)\right) dx - \\ - \int\limits_{\Gamma_T} [y(v)(x,t) - y(u)(x,t)] \tfrac{\partial \omega(u)(x,t)}{\partial t} dxdt + \\ + \ell_T(y(v) - y(u), \omega(u)) = \int\limits_\Gamma [v(x) - u(x)]\omega(u)(x,0)dx.\end{gathered} \tag{31}$$

Учитывая вытекающее из (24) при $\zeta(x,t) = y(v)(x,t) - y(u)(x,t) \in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T) \subset W^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$ равенство нулю выражения $-\int\limits_{\Gamma_T} [y(v)(x,t) - y(u)(x,t)] \frac{\partial \omega(u)(x,t)}{\partial t} dxdt + \ell_T(y(v) - y(u), \omega(u))$, получаем из (31) соотношение

$$\int\limits_\Gamma [y(v)(x,T) - y(u)(x,T)]\omega(u)(x,T)dx = \int\limits_\Gamma [v(x) - u(x)]\omega(u)(x,0)dx,$$

приводящее неравенство (30) (значит, и (25)) к виду

$$\int\limits_\Gamma [v(x) - u(x)]\omega(u)(x,0)dx + (Nu, v-u)_{\mathbb{U}} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}_\partial$$

или в эквивалентной форме ($\mathbb{U} = L_2(\Gamma)$) к

$$(\omega(u)(x,0) + Nu, v-u)_{L_2(\Gamma)} \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}_\partial.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Пусть множество $\mathbb{U}_\partial$ ограничено. Для того чтобы элемент $u(x) \in \mathbb{U}_\partial$ был оптимальным управлением системы* (5), *необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения:*

$$\begin{gathered}\int\limits_\Gamma y(u)(x,t)\eta(x,t)dx + \int\limits_{\Gamma_t} \left(-y(u)(x,t)\tfrac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}\right) dxdt + \ell_t(y(u),\eta) = \\ = \int\limits_\Gamma v(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt\end{gathered} \tag{32}$$

для любых $\eta(x,t) \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$ и любых $t \in [0,T]$;

$$-\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial \omega(u)(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \ell_T(\omega(u),\zeta) = 0,$$

для любых $\zeta(x,t) \in W^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$,

$$\int\limits_\Gamma \left(\omega(u)(x,0) + Nu(x)\right)\left(v(x) - u(x)\right) dx \geqslant 0$$

для любых $v \in \mathbb{U}_\partial$.

Здесь $y(u) \in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$, $\omega(u) \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$ и $\omega(u)(x,T) = y(u)(x,T) - z_0(x)$.

6. Управляемость системы (5). Приведем определение управляемости системы (5) в редакции, принятой в монографии [13, с. 214].

О п р е д е л е н и е 4. Система (5), *состояние которой определяется как решение начально-краевой задачи* (5)–(7), называется управляемой (в момент времени T), если наблюдение $Cy(v) = y(v)(x,T)$ заметает подпространство, плотное в пространстве наблюдений $L_2(\Gamma)$, когда управление v пробегает все пространство управлений $\mathbb{U}$.

Покажем, что рассматриваемая система (5) управляема. Пусть функция $\rho(x)$ из пространства наблюдений $L_2(\Gamma)$ ортогональна к подпространству, заметаемому наблюдением $y(v)(x,T)$: $\int\limits_\Gamma \rho(x)y(v)(x,T)dx = 0$ для любых $v \in \mathbb{U}$. Рассмотрим функцию $p(x,t) \in \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$ как обобщенное решение начально-краевой задачи

$$-\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)p(x,t) = 0, \tag{33}$$

$$p(x,T) = \rho(x), x \in \Gamma, \quad p\mid_{x\in\partial\Gamma} = 0, t \in (0,T), \tag{34}$$

т. е. функция $p(x,t)$ ($p(x,T) = \rho(x)$, $x \in \Gamma$) удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \ell_T(p,\zeta) = 0 \tag{35}$$

для любой $\zeta(x,t) \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$. Доказательство однозначной разрешимости задачи (33)–(35) почти дословно повторяет рассуждения при доказательстве теорем 2 и 4.

Положим в соотношении (35) $\zeta(x,t) = y(v)(x,t) - y(u)(x,t) \in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T) \subset W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$, тогда, учитывая соотношение (32) для $y(v)(x,t)$ и $y(u)(x,t)$ при $t = T$ и $\eta(x,t) = p(x,t)$, получаем

$$\begin{aligned} 0 = &-\int\limits_{\Gamma_T}[y(v)(x,t) - y(u)(x,t)]\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_T(y(v) - y(u),p) = \\ = &-\int\limits_\Gamma[y(v)(x,T) - y(u)(x,T)]p(x,T)dx + \int\limits_\Gamma[v(x) - u(x)]p(x,0)dx, \end{aligned}$$

откуда в силу $p(x,T) = \rho(x)$ вытекает $\int\limits_\Gamma[v(x)-u(x)]p(x,0)dx = 0$ для любых $v(x), u(x) \in \mathbb{U}$. Последнее означает, что $p(x,0) = 0$ и в силу единственности обобщенного решения уравнения (33) с нулевыми исходными данными — $p(x,t) = 0$, значит, как следует из первого соотношения (34), $\rho(x) = 0$ (все равенства здесь понимаются почти всюду). Следовательно, справедлива

Т е о р е м а 8. *Система* (5), *состояние которой определяется как обобщенное решение начально-краевой задачи* (5)–(7) *в пространстве* $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$, *управляема.*

Задача стартового управления системой (5) в пространстве $V^{1,0}_2(a,\Gamma_T)$ мало чем отличается от таковой в $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$. Все утверждения теорем 5–8 сохраняются: пространство $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$ заменяется на $V^{1,0}_2(a,\Gamma_T)$, краевое условие (28) в задаче (26)–(28), определяющей сопряженное состояние системы (5), — на краевое условие, приведенное в замечании 2 к теореме 2, наконец, соотношение (29) в определении 3 принимает вид

$$-\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial\omega(v)(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \ell_T(\omega(v),\zeta) + \sum_{\gamma\in\partial\Re}\sigma_\gamma\int\limits_0^t y(x,t)\eta(x,t)|_{x=1\in\gamma}dt = 0,$$

для любых функций $\zeta(x,t) \in W^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$.

7. Заключение. В работе рассмотрен распространенный в приложениях случай стартового управления $v \in \mathbb{U} = L_2(\Gamma)$ и финального наблюдения $Cy(v) = y(v)(x,T)$ для дифференциальной системы (5), состояние $y(v)(x,t)$ которой описывается решением начально-краевой задачей (5)–(7). Хотя применение методов демонстрируется для указанных управления и наблюдения, используемые приемы обладают большой общностью и применимы к другим видам управлений и наблюдений, например граничным [8, 14, 15]. В последнем случае $\mathbb{U} = L_2(\partial\Gamma_T)$, а состояние системы (5) определяется как обобщенное решение задачи (5)–(7) с краевым условием $y\,|_{\partial\Gamma}= v$ вместо (7). При этом необходимо рассматривать след функции $y(v)$ на $\partial\Gamma_T$ (или части $\partial\Gamma_T$); сопряженное состояние системы описывается уравнениями, задаваемыми как на Γ_T, так и на $\partial\Gamma_T$. Следует отметить, что в работах [16–21] рассмотрены другие подходы при анализе прикладных задач управления и родственных им задач оптимизации, имеющие, однако, аналогичную трактовку (в терминах сопряженного состояния) условий существования оптимального управления. Отметим также, что изучаемая задача допускает в представлении уравнения (5) особенности в виде стохастической компоненты [22] и разрывной нелинейности [23, 24].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подвальный С.Л., Провоторов В.В.* Оптимизация по стартовым условиям параболической системы с распределенными параметрами на графе // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 58. № 4. С. 70-74.

2. *Подвальный С.Л., Васильев Е.М.* Концепция многоальтернативного управления открытыми системами: истоки, состояние и перспективы // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013. Т. 9. № 2. С. 4-20.

3. *Подвальный С.Л.* Особенности поисковой градиентной оптимизации сложных объектов с использованием сопряженных систем // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 56. № 2. С. 18-22.

4. *Подвальный С.Л., Васильев Е.М.* Модели многоальтернативного управления и принятия решений в сложных системах // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 56. № 2.1. С. 169-173.

5. *Подвальный С.Л., Васильев Е.М.* Многоальтернативные системы: концепция, состояние и перспективы // Управление большими системами: сб. трудов. Москва: Изд-во ИПУ РАН, 2014. № 48. С. 6-58.

6. *Подвальный С.Л., Васильев Е.М.* Эволюционные принципы построения интеллектуальных систем многоальтернативного управления // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 57. № 3. С. 4-8.

7. *Volkova A.S., Gnilitskaya Yu.A., Provotorov V.V.* On the Solvability of Boundary-Value Problems for Parabolic and Hyperbolic Equations on Geometrical Graphs // Automation and Remote Control. 2014. V. 75. № 2. P. 405-412.

8. *Провоторов В.В., Гнилицкая Ю.А.* Граничное управление волновой системой в пространстве обобщенных решений на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 112-120.

9. *Волкова А.С., Провоторов В.В.* Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.

10. *Провоторов В.В., Волкова А.С.* Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2014. 188 с.

11. *Провоторов В.В.* Разложение по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на графе-пучке // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 3. С. 50-62.

12. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

13. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / пер. с фр. Н. Х. Розова; под ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: Мир, 1972. 414 с. (*Lions J.-L.* Optimum control of the systems described by the equations with private derivatives.)

14. *Провоторов В.В.* Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 3. С. 154-163.

15. *Провоторов В.В.* Моделирование колебательных процессов системы «мачта-растяжки» // Системы управления и информационные технологии. 2008. № 1.2 (31). С. 272-277.

16. *Podval'ny S.L., Ledeneva T.M.* Intelligent Modeling Systems: Design Principles // Automation and Remote Control. 2013. V. 74. № 7. P. 1201-1210.

17. *Подвальный С.Л.* Решение задач градиентной оптимизации каскадно-реакторных схем с использованием сопряженных систем // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013. Т. 9. № 2. С. 27-32.

18. *Александров А.Ю., Жабко А.П.* Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 3. С. 495-508.

19. *Александров А.Ю., Жабко А.П.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 3-14.

20. *Веремей Е.И., Корчанов В.М.* Многоцелевая стабилизация динамических систем одного класса // Автоматика и телемеханика. 1988. № 9. С. 126-137.

21. *Веремей Е.И., Сотникова М.В.* Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. Вып. 1. С. 116-133.

22. *Карелин В.В.* Штрафные функции в задаче управления процессом наблюдения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. Вып. 4. С. 109-114.

23. *Потапов Д.К.* Оптимальное управление распределенными системами эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 2 С. 19-24.

24. *Kamachkin A.M., Yevstafyeva V.V.* Oscillations in a relay control system at an external disturbance // Control Applications of Optimization-2000: Proceedings of the 11th IFAC Workshop. 2000. V. 2. P. 459-462.

Поступила в редакцию 31 мая 2015 г.

Provotorov V.V., Provotorova E.N. OPTIMAL CONTROL OF THE PARABOLIC TYPE DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS ON A GRAPH

It is considered the problem of optimal control of a differential system which state is defined as a generalized (weak) solution of the initial-boundary value problem with distributed parameters on a graph in the space of Sobolev type. The influences on the system is carried out at the initial time and is starting, monitoring of the system status is carried out at the final time, and is final. In this case, the choice of state space due to the existence of trace of function that describes the state of the system at a fixed time variable. Adjoint state of the system is also defined as a generalized (weak) solution of the initial-boundary value problem with distributed parameters on the graph with the final condition. It is obtained necessary and sufficient conditions for the existence of a unique start control and manageability of differential system. The adduced allegations and the results are constructive and useful for the numerical solution of optimal control problems under consideration.

Key words: boundary value problem; distributed parameters on a graph weak solutions; optimal control; controllability.

Провоторов Вячеслав Васильевич, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, e-mail: wwprov@mail.ru

Provotorov Vjacheslav Vasil'evich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Partial Differential Equations and Probability Theory Department, e-mail: wwprov@mail.ru

Провоторова Елена Николаевна, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, e-mail: enprov@mail.ru

Provotorova Elena Nikolaevna, Voronezh State Technical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics and Physical and Mathematical Modeling Department, e-mail: enprov@mail.ru