The linear differential equation with distributed delay is considered. Some exact effective conditions of stability and positivity of the Cauchy function for this equation are presented. The areas of applicability of the conditions are compared.

Key words: functional differential equation; distributed delay; Cauchy function; stability; positivity of the Cauchy function.

Сабатулина Татьяна Леонидовна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: TSabatulina@gmail.com

Sabatulina Tatyana Leonidovna, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Research Center «Functional-Differential Equations», e-mail: TSabatulina@gmail.com

УДК 517.958

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© А.Ю. Сазонов, Ю.Г. Фомичева

Ключевые слова: оператор Бесселя; смешанная задача; гиперболическое и параболическое уравнения.

В работе найдены достаточные условия на границу области, коэффициенты оператора, правую часть и начальную функцию при которых ряд Фурье представляет классическое решение первой краевой задачи для гиперболического и параболического уравнения второго порядка, содержащего оператор Бесселя по нескольким пространственным переменным.

Пусть ${\mathbb{R}_+}^{n+m}$ — множество точек $x=(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=(x',y')$ действительного евклидова $(n+m)$-мерного пространства $\mathbb{R}^{n+m}$, удовлетворяющих условию $y_i>0$, $i=\overline{1,m}$; область $\Omega^+\subset{\mathbb{R}_+}^{n+m}$ и прилегает к гиперплоскостям $y_1=0,\ldots,y_m=0$; Γ^+- часть границы Ω^+ расположенная в области $y_i>0$, $i=\overline{1,m}$.

В работе рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-L_{y'}u=f(x,t), u(x,0)=\varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), u|_{\Gamma_+}=0, \frac{\partial u}{\partial y_i}\Big|_{y_i=0}=0, i=\overline{1,m}, \qquad (1)$$

и аналогичная задача для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-L_{y'}u=f(x,t), u(x,0)=\varphi(x), u|_{\Gamma_+}=0, \frac{\partial u}{\partial y_i}\Big|_{y_i=0}=0, i=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$L_{y'}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)+\sum_{i=1}^{m}b_i(x')B_{y_i}+c(x), B_{y_i}=\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{k_i}{y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}, c(x)\leqslant 0, k_i>0.$$

Общие решения задач (1)–(2) представимы, соответственно, рядами Фурье

$$u(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}\nu_p(x)\Big[\varphi_p\cos\sqrt{\lambda_p}t+\frac{\psi_p}{\sqrt{\lambda_p}}\sin\sqrt{\lambda_p}t+\frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}\int\limits_0^1 f_p(\tau)\sin\sqrt{\lambda_p}(t-\tau)d\tau\Big], \qquad (3)$$

$$u(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}\nu_p(x)\Big[\varphi_p e^{-\sqrt{\lambda_p}t}++\frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}\int\limits_0^1 f_p(\tau)e^{-\sqrt{\lambda_p}(t-\tau)}d\tau\Big], \qquad (4)$$

где $\nu_p(x)$ — собственные функции соответствующей краевой задачи для оператора $L_{y'}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* Γ^+ *— произвольная поверхность типа Ляпунова. Функции* $a_{ij}(x)$, $b_i(x')$ *и* $c(x)$ *удовлетворяют условию B-эллиптичности и условию* $c(x)\leqslant 0$ *в замкнутой области* $\overline{\Omega^+}$. *Если*

1) $a_{ij}(x)$ *имеют непрерывные производные до порядка* $s+2$, *а коэффициенты* $b_i(x')$ *и* $c(x)$ *и до порядка* $s+1, s=[(n+m+k)/2], k=k_1+\ldots+k_m$;

2) $\varphi(x)$ *непрерывно дифференцируема до порядка* $s+2$. *Производная порядка* $s+3$ *принадлежит классу* $L_{2,k}(\Omega^+), \varphi|_{\Gamma^+}=0, L_{y'}\varphi|_{\Gamma^+}=0,\ldots,L_{y'}^{p+1}\varphi|_{\Gamma^+}=0, p=[(n+m+k)/4]$;

3) $\psi(x)$ *непрерывно дифференцируема до порядка* $s+1$. *Производная порядка* $s+2$ *принадлежит классу* $L_{2,k}(\Omega^+), \psi|_{\Gamma^+}=0, L_{y'}\psi|_{\Gamma^+}=0,\ldots,L_{y'}^{r}\psi|_{\Gamma^+}=0$;

4) $f(x,t)$ *непрерывно дифференцируема до порядка* $s+1$. *Производная порядка* $s+2$ *принадлежит классу* $L_{2,k}(Q^+{}_T), f|_{\Gamma^+}=0, L_{y'}f|_{\Gamma^+}=0,\ldots,L_{y'}^{r}f|_{\Gamma^+}=0, Q^+{}_T=\Omega^+\times(0,T)$, $r=[(n+m+k+2)/4]$, *тогда сумма ряда (3) определяет классическое решение задачи (1).*

Т е о р е м а 2. *Пусть* $a_{ij}(x)$, $b_i(x')$, $c(x)$ *и правая часть* $f(x,t)$ *удовлетворяют условию теоремы 1. Если*

1) a_{ij} *имеют непрерывные производные до порядка* s, *а коэффициенты* $b_i(x')$ *и* $c(x)$ *до порядка* $s-1$;

2) $\varphi(x)$ *непрерывно дифференцируема до порядка* s. *Производная порядка* $s+1$ *принадлежит классу* $L_{2,k}(\Omega^+), \varphi|_{\Gamma^+}=0, L_{y'}\varphi|_{\Gamma^+}=0,\ldots,L_{y'}^{p+1}\varphi|_{\Gamma^+}=0, p=[(n+m+k)/4]$, *тогда сумма ряда (4) определяет классическое решение задачи (2).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
2. *Сазонов А.Ю., Фомичева Ю.Г.* О задаче Дирихле в неограниченной области для B-эллиптического оператора с особенностями по нескольким переменным // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные науки и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. № 1. С. 72-73.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-97504).

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Sazonov A.Yu., Fomicheva Yu.G. ON CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEMS FOR SINGULAR HYPERBOLIC AND PARABOLIC EQUATIONS

In the work, there are established sufficient conditions on the area boundary, the operator coefficients, the right-hand side and the initial function under which the Fourier series gives a classical solution of the first boundary-value for the second order hyperbolic and parabolic equations containing the Bessel operator on several phase variables.

Keywords: Bessel operator; mixed problem; hyperbolic and parabolic equations.

Сазонов Анатолий Юрьевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Sazonov Anatolii Yurievich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Algebra and Geometry Department, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Фомичева Юлия Геннадиевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой алгебры и геометрии, e-mail: fomichevajulia@mail.ru

Fomicheva Yulia Gennadievna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, the Head of the Algebra and Geometry Department, e-mail: fomichevajulia@mail.ru

УДК 519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ СХЕМЫ С СИММЕТРИЗОВАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **С.В. Свиридов**

Ключевые слова: уравнения переноса с запаздыванием; численные методы.

В работе для уравнения переноса с функциональным запаздыванием конструируется схема с симметризованными производными, определяется порядок её сходимости. Также в работе приводятся результаты численных экспериментов для уравнений с разными типами запаздывания.

Рассмотрим уравнение переноса с эффектом наследственности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t,u(x,t),u_t(x,\cdot)), \tag{1}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X,$$

с краевым условием

$$u(0,t) = \gamma(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

и начальным условием

$$u(x,s) = \varphi(x,s),\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ -\tau \leqslant s \leqslant 0.$$

Здесь x, t — независимые переменные, $u(x,t)$ — искомая функция, $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s), -\tau \leqslant s < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t, $\tau > 0$ — величина запаздывания.

Ранее задача (1) изучалась в [1]. В докладе приводится новый алгоритм, эффективность которого, в сравнении с рассмотренными в [1], подтверждается численными экспериментами.

Произведем дискретизацию задачи. Пусть шаг h по переменной x такой, что $X/h = N \in \mathbb{N}$, обозначим через $x_n = nh \in [0,X]$, $n = 0\dots N$. Пусть шаг Δ по переменной t