above // Geometriae Dedicata. 2010. V. 149. № 1. P. 275–290.
2. *Miroslav B.* Note on a compactness characterization via a pursuit game // Geometriae Dedicata. 2012. V. 160. № 1. P. 195–197.
3. *Noori N., Isler V.* Lion and Man with Visibility in Monotone Polygons // The International Journal of Robotics Research. 2013.
4. *Noori N., Isler V.* The Lion and Man Game on Convex Terrains. 2014.
5. *Bramson M., Burdzy K., Kendall W.* Shy couplings, CAT(0) spaces, and the lion and man // Ann. Probab. 2013. V. 41. № 2. P. 744–784.

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Yufereva O.O. LION AND MAN GAME ON A COMPACT METRIC SPACE
The lion and man game on a compact metric space is considered. Both players have the equal speeds. Suppose that 1) for all pairs of points there exists a unique geodesic connecting this points; 2) every geodesic continuously depends on its own endpoints. Then the strategy of simple pursuit guarantees the ε-capture. In particular, this implies the same result for CAT(0) domains.
Key words: pursuit-evader game, Lion and Man, compact set, geodesic, metric spaces, simple pursuit strategy.

Юферева Ольга Олеговна, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, студент, e-mail: yufereva12@gmail.com

Yufereva Olga Olegovna, Ural Federal University, Ekaterinburg, the Russian Federation, Student, e-mail: yufereva12@gmail.com

УДК 517.9

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© Н.М. Япарова

Ключевые слова: обратная задача идентификации источника; система с распределенными параметрами; теплопроводность; преобразование Лапласа; метод регуляризации.
В статье рассмотрена одномерная обратная задача идентификации неизвестной функции источника тепла в параболическом уравнении для систем с распределенными параметрами. Предложен метод решения, основанный на использовании прямого и обратного преобразований Лапласа, позволяющий сначала свести исходную задачу к решению операторного уравнения, характеризующего явную зависимость неизвестной функции источника от известных граничных условий, а затем уже использовать регуляризующие алгоритмы для построения численного решения. Такой подход позволяет исключить неустойчивую процедуру численного обращения преобразования Лапласа из вычислительной схемы. На основании полученных результатов был разработан численный метод, проведен вычислительный эксперимент и получены экспериментальные оценки погрешностей численных решений. Результаты вычислительного эксперимента свидетельствуют о достаточной эффективности предложенного метода.

Важнейшими объектами исследования, имеющими вид систем с распределенными параметрами, являются процессы, связанные с распределением тепла внутри тела, сопровождающиеся выделением или поглощением тепла самим телом. В последнее время при разработке новых технологических процессов, связанных с рассматриваемыми системами, большое внимание уделяется проблеме оптимизации энергозатрат. Перспективным направлением в решении этой проблемы является подход, учитывающий при реализации желаемых свойств объекта влияние выбранных режимов управления на тепловые характеристики, возникающие в результате выделения или поглощения тепла внутри тела. Математически в линейном приближении эти процессы описываются неоднородными уравнениями параболического типа с неизвестным неоднородным слагаемым и дополнительно известными начальными и граничными условиями. Граничные условия в этих задачах являются управляющими воздействиями, а неизвестное неоднородное слагаемое в уравнении характеризует плотность тепловых потоков, связанных с выделением или поглощением тепла внутри тела и рассматривается как источник тепла в задаче распространения тепла в теле. В этих задачах требуется определить функцию источника тепла и, в соответствии с полученными результатами, построить решение неоднородного уравнения, удовлетворяющего предложенным начальным и граничным условиям. Примером такого рода процесса является реактивная диффузия, сопровождаемая фазовыми превращениями, происходящими в результате химического взаимодействия диффундирующих элементов, где неоднородное слагаемое характеризует скорость химической реакции. Другим примером является модель роста зародышей новой фазы в многокомпонентном растворе в процессе нанокристаллизации твердого аморфного сплава [1].

В данной работе рассмотрена следующая математическая модель систем с распределенными параметрами:

$$u_t = a u_{xx} + f(t), \quad x \in (0, \ell)\,, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = u(x,0) = 0, \quad x \in (0,\ell)\,, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = g(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{3}$$

В этой задаче известны граничные и начальные условия (2), (3), а функция $f(t)$, характеризующая источник тепла, является неизвестной.

Предположим, что $g \in C^{2+\eta}[0,T]$ для всех $T > 0$, где $\eta \in (0,1)$ и существуют константы M, m такие, что $\|g(t)\| \leqslant Me^{mt}$ при всех $t \in [0,T]$ для любого $T > 0$. Обозначим $Q_T = (0,\ell) \times (0,T)$ при $T > 0$. В задаче (1)-(3) требуется найти функцию $f(t) \in C^{2+\eta}[0,T]$ при всех $T > 0$, а затем построить функцию $u(x,t) \in H^{2,1}(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющую (1)-(3).

Известно, что при $g(t) = g_0(t)$ существует требуемая функция $f_0(t)$, а также $u_0(x,t)$ удовлетворяющая (1)-(3), но вместо g_0 известны некоторые приближения g_δ и допустимый уровень погрешности $\delta > 0$ такой, что $\|g_\delta - g_0\| \leqslant \delta$. Требуется, основываясь на (1)-(3) и приближенно заданных g_δ, определить функцию источника $f(t)$, а затем получить $u_\delta(x,t)$ удовлетворяющую (1)-(3), то есть необходимо найти решение обратной граничной задачи идентификации источника тепла внутри тела. Единственность решения рассматриваемой задачи (1)-(3) доказана в [2].

Как правило, решение обратных задач неустойчиво относительно погрешностей исходных данных, поэтому эти задачи относятся к классу некорректных задач и для получения численного решения этих задач применяют методы регуляризации. Разработка регуляризующих алгоритмов достаточно часто связана с использованием преобразований Фурье [3], преобразований Лапласа [4, 5] преобразований Роте [6]. В существующих подходах, как правило, сначала используют прямые преобразования, затем находят численные решения и уже для регуляризованного решения выполняют обратное преобразование. Однако, основная трудность при использовании обратного преобразования, особенно преобразования Лапласа, состоит в том, что эта операция неустойчива.

В данном исследовании предложен другой подход, согласно которому решение задачи (1)-(3) осуществляется в два этапа. Первый этап состоит в сведении поставленнной задачи к уравнению Вольтерра первого рода, характеризующего зависимость неизвестной функции источника от граничных функций (3). Реализация первого этапа осуществляется путем применения прямого и обратного преобразований Лапласа. Доказано, что решение исходной задачи удовлетворяет следующему уравнению:

$$\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau = g(t),$$

где ядро $K(t,\tau)$ при всех $t \in [0;T]$ для любого $T > 0$ определяется формулой:

$$K\left(t-\tau\right) = \frac{4}{\ell}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a}{\ell^2}(t-\tau)}.$$

Второй этап включает построение численного решения f_δ полученного уравнения Вольтерра посредством применения регуляризующего алгоритма. Регуляризирующее свойство в предлагаемом численном методе обеспечивается тем, что при аппроксимации уравнения Вольтерра конечномерным аналогом в качестве параметра регуляризации выступает количество слагаемых, а также параметр регуляризации α, выбираемый апостериорно.

Предложенный метод позволяет исключить неустойчивую процедуру численного обращения преобразования Лапласа из вычислительной схемы. Аналогичный подход был использован для решения обратной граничной задачи в работе [7].

На основании предложенного метода был проведен вычислительный эксперимент для тестовых функций, в ходе которого были получены экспериментальные оценки погрешностей численного решения обратной задачи определения источника. Результаты эксперимента свидетельствуют о устойчивости и достаточной эффективности предложенного метода. Результаты эксперимента, полученные для некоторых тестовых функций, проиллюстрированы на нижеприведенных рисунках.

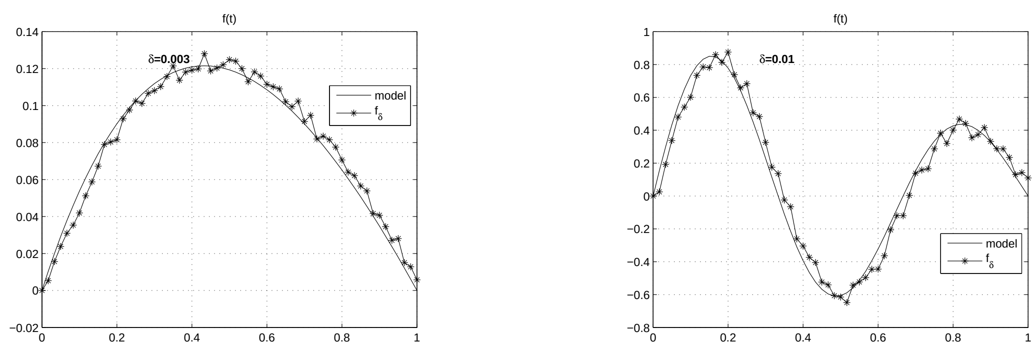

Рис. 1: Результаты численного решения обратной задачи идентификации источника. На рисунках изображены графики функций источника. Обозначение «model» соответствует графику тестовой функции $f(t)$, а f_δ — численному решению задачи идентификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дрозин А.Д., Дудоров М.В, Рощин В.Е., Гамов П.А., Менихес Л.Д.* Математическая модель образования кристаллических зародышей в переохлажденном расплаве эвтектического состава // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. Челябинск, 2012. № 6. С. 78-88.

2. *Bushuyev I.* Global uniqueness for inverse parabolic problems with final observation // Inverse Problems. UK, 1995. V. 11. Iss. 4. P. L11-L16.

3. *Черепанова О.Н., Шипина Т.Н.* Об одной задаче идентификации функции источника в параболическом уравнении // Журнал Сибирского Федерального Университета. Серия Математика и физика. Красноярск, 2009. Т. 2. № 3. С. 370-375.

4. *Репкин Д.А., Мелюков В.В., Гусаков А.К., Чирков А.М., Князева И.А.* Определение режима воздействия концентрированными потоками энергии на материалы методом обратной задачи // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Физика твердого тела. Н. Новгород, 2013. № 2. С. 88-91.

5. *Cialkowski M., Grysa K.* A sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2010. V. 48. Iss. 1. P. 111-134.

6. *Slodicka M.* Identification of a memory kernel in a semilinear integrodifferential parabolic problem with applications in heat conduction with memory // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2015. V. 48. Iss. 1. P. 111-134.

7. *Yaparova N.* Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem // Inverse Problems in Science and Engineering. UK, 2014. V. 22. Iss. 5. P. 832-847.

Поступила в редакцию 15 мая 2015 г.

Yaparova N.M. A METHOD FOR SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF IDENTIFYING THE SOURCE FUNCTION FOR SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

This paper considers the inverse problem of identifying the unknown time-dependent source term in a parabolic equation. To solve this problem, a method based on the direct and inverse Laplace transform is proposed. This approach makes it possible to obtain an operator equation describing the explicit dependence of the unknown source function on the boundary function, and then regularization method is used to solve this equation. This eliminates the need to carry out the unstable procedure of numerical inversion in the computational process. The proposed method was used in a computational experiment to obtain a numerical solution of the inverse problem. Results of computational experiment and experimental error estimates of the obtained solutions show sufficient stability and efficiency of the proposed method.

Keywords : inverse source problem; system with distributed parameters; heat conduction; the Laplace transform; regularization method.

Япарова Наталья Михайловна, Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, e-mail: natyap7@mail.ru

Yaparova Natalia Mikhailovna, South Ural State University, Chelyabinsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: natyap7@mail.ru