УДК 517.988 + 517.977.56

МАЖОРАНТНЫЙ ПРИЗНАК ПЕРВОГО ПОРЯДКА ТОТАЛЬНОГО СОХРАНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

© А.В. Чернов

Ключевые слова: функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна; тотальное сохранение глобальной разрешимости; мажорантное уравнение; вольтерровость.

Рассматривается нелинейное функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна, представляющее собой удобную форму описания широкого класса управляемых распределенных систем. Для указанного уравнения формулируется мажорантный признак тотального (по всему множеству допустимых управлений) сохранения глобальной разрешимости, использующий предположения о вольтерровости операторной составляющей и о дифференцируемости по переменной состояния функциональной составляющей правой части. Кроме того, используются предположения о глобальной разрешимости некоторого мажорантного уравнения, а также исследуемого уравнения для фиксированного допустимого управления.

О п р е д е л е н и е 1. *Тотальное сохранение глобальной разрешимости* (ТСГР) — это свойство управляемой системы сохранять глобальную разрешимость для всех допустимых управлений.

Нарушение разрешимости распределенной системы весьма вероятно в случае, когда порядок роста правой части соответствующего дифференциального уравнения по фазовой переменной превышает линейный. В [1, пример к теореме 2.2, с. 87-88; § 4, с. 95-100], [2, § 1], [3, введение, п. 2] приводятся достаточно показательные примеры на этот счет. Вместе с тем, ТСГР оказывается востребованным в следующих разделах теории оптимизации: 1) при обосновании численных методов оптимального управления [4, 5, 6]; 2) при доказательстве управляемости [7] 3) при доказательстве существования равновесия в дифференциальных играх [8, 9, 10]. Понятие ТСГР было введено в [11]. Там же был доказан мажорантный признак ТСГР для управляемых распределенных систем эволюционного типа, представимых функционально-операторным уравнением типа Гаммерштейна (см. далее). В работе [12] (см. также [13]) был доказан еще один признак ТСГР мажоратно-минорантного типа. Признак тотального сохранения разрешимости для не обязательно эволюционных систем, основанный на одном обобщении метода монотонных операторов, был доказан в [14]. Помимо собственно ТСГР, в работах [11, 12] доказывалась равномерная (по множеству допустимых управлений) поточечная оценка решений, а в работе [14] — равномерная оценка по норме соответствующего пространства.

Данная статья продолжает исследования в указанной области и представляет еще один признак ТСГР мажорантного типа, использующий предположения о вольтерровости операторной составляющей и о дифференцируемости по переменной состояния функциональной составляющей правой части. Кроме того, используются предположения о глобальной разрешимости некоторого мажорантного уравнения, а также исследуемого уравнения для фиксированного допустимого управления $u = v$. В отличие от [11, 12], мажорантное уравнение на этот раз получается оценкой приращения правой части при отклонении управления от $u = v$ (с использованием теоремы Лагранжа о конечных приращениях). Разрешимость мажорантного уравнения, таким образом, означает, что величина отклонения допустимых управлений от $u = v$ «не слишком критична». Здесь можно усмотреть некоторую связь с теорией устойчивости существования глобальных решений, см., например, [15] (включая указанную там библиографию по этой теме).

Пусть $n, m, \ell, s \in N$, $1 \leqslant p < q < +\infty$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$ — заданные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (здесь и далее в смысле Лебега) ограниченное множество, $A : L_p^m(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$ — заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО); $\mathcal{D} \subset L_r^s(\Pi)$ — ограниченное множество. Рассмотрим управляемое функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна

$$y(t) = w(t) + A\Big[g\Big(., y(.), u(.)\Big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad y(.) \in L_q^\ell(\Pi), \tag{1}$$

где $u \in \mathcal{D}$ — управляющая функция (управление), $w \in L_q^\ell(\Pi)$; $g(.,.,.) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ — заданная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

F$_1$) $g(t, x, w)$ непрерывно дифференцируема по $x \in \mathbb{R}^\ell$ для почти всех (п.в.) $t \in \Pi$, при каждом $w \in \mathbb{R}^s$ и вместе с производной $g'_x(t, x, w) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{m \times \ell}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{x, w\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ для п.в. $t \in \Pi$;

F$_2$) для каждого $u(.) \in L_r^s(\Pi)$ формула $\mathbf{G}_u[y] = g\Big(., y(.), u(.)\Big)$ определяет оператор $\mathbf{G}_u : L_q^\ell(\Pi) \to L_p^m(\Pi)$;

F$_3$) для каждого $u \in L_r^s(\Pi)$ формула $\mathcal{G}_u[y] = g'_x\Big(., y(.), u(.)\Big)$ определяет оператор $\mathcal{G}_u : L_q^\ell(\Pi) \to L_\sigma^{m \times \ell}(\Pi)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{p}$.

Относительно ЛОО A будем предполагать, что он обладает для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ-малой по мере цепочкой множеств, а кроме того, имеет положительную мажоранту $B : L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$. Напомним соответствующие понятия.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ — σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Π, P_H — оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества $H \in \Sigma$. Систему $\mathcal{B}(F) = \Big\{H \in \Sigma : P_H F P_H = P_H F\Big\}$ будем называть *системой вольтерровых множеств* оператора $F : L_p^m(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$. При этом для числа $\delta > 0$ подсистему вида $\mathcal{T} = \Big\{\emptyset = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\Big\}$ системы $\mathcal{B}(F)$ будем называть *вольтерровой δ-малой по мере цепочкой* оператора F, если меры разностей $\mathrm{mes}(H_i \setminus H_{i-1}) < \delta$, $i = \overline{1, k}$.

Пусть $\mathcal{V} = \big\{u(.) \in L_r^s(\Pi) \colon \ |u(t)| \leqslant V(t)$ для п.в. $t \in \Pi\big\}$, а $V(.) \in L_r(\Pi)$ — фиксированная функция. Пользуясь известной леммой о мажоранте в лебеговом пространстве, нетрудно показать, что существуют $a(.) \in L^+{}_\sigma(\Pi)$ и $b \geqslant 0$ такие, что

$$|g'_x(., y_v + \theta \Delta y, u)| \leqslant a(t) + b\left(|\Delta y|^{q/\sigma} + |u|^{r/\sigma}\right) \leqslant a_0(t) + b \cdot |\Delta y|^{q/\sigma},$$

где $a_0 = a + b|V|^{r/\sigma} \in L_\sigma(\Pi)$. Для указанных параметров $a_0(.)$ и b, а также для функции $\overline{\varphi}(t) = B\Big[\max\limits_{u \in \mathbb{R}^s : |u| \leqslant V(t)} |\Delta_u g(y_v)|\Big](t)$ определим *мажорантное* уравнение для семейства уравнений (1):

$$x = bB\Big[x^{q/p}\Big] + B\Big[a_0(.)x\Big] + \overline{\varphi}, \quad x \in L_q^+. \tag{2}$$

Следующее утверждение дает достаточные условия ТСГР уравнения (1).

Т е о р е м а 1. *Пусть $V(.) \in L_r(\Pi)$, $v(.) \in L_r^s(\Pi)$ — некоторые фиксированные функции, причем для $u = v$ существует решение $y = y_v$ уравнения* (1) ; $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$. *Пусть, кроме того, мажорантное уравнение* (2) *имеет решение* $\overline{x}$. *Тогда каждому управлению* $u \in \mathcal{D}$

отвечает единственное решение $y = y_u$ *уравнения* (1). *Указанное решение удовлетворяет оценке:* $\left|y_u(t) - y_v(t)\right| \leqslant \overline{x}(t)$ *для п.в.* $t \in \Pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калантаров В.К., Ладыженская О.А.* О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102.

2. *Сумин В.И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.

3. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.

4. *Чернов А.В.* О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629.

5. *Чернов А.В.* О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 12. С. 2029–2043.

6. *Чернов А.В.* О гладкости аппроксимированной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу на варьируемой области // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 305–321.

7. *Чернов А.В.* О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1400–1414.

8. *Чернов А.В.* О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.

9. *Чернов А.В.* Об ε-равновесии в бескоалиционных функционально-операторных играх со многими участниками // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 316–328.

10. *Чернов А.В.* О существовании ε-равновесия в дифференциальных играх, связанных с эллиптическими уравнениями, управляемыми многими игроками // Матем. теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6. Вып. 1. С. 91–115.

11. *Чернов А.В.* Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Матем. 2011. № 3. С. 95–107.

12. *Чернов А.В.* О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.

13. *Чернов А.В.* О тотальном сохранении глобальной разрешимости управляемых начально-краевых задач // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1219–1221.

14. *Чернов А.В.* Об одном обобщении метода монотонных операторов // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 535–544.

15. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Условия сохранения глобальной разрешимости вольтерровых операторных уравнений и их применение в теории распределенных управляемых систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 4. С. 809–811.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана финансово МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект №1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 №02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Chernov A.V. A MAJORANT CRITERION OF THE FIRST ORDER FOR THE TOTAL PRESERVATION OF GLOBAL SOLVABILITY OF A CONTROLLED HAMMERSTEIN TYPE EQUATION

We consider a nonlinear functional operator equation of the Hammerstein type as a convenient form for describing a wide class of controlled distributed parameter systems. For the equation under study we formulate a majorant criterion of the total (with respect to the whole set of admissible controls) preservation of global solvability. This criterion uses the hypotheses on Volterra property of the operator component and on differentiability with respect to the state variable of the functional component in the right-hand side of the equation. Moreover, it is based on hypotheses consisting in the global solvability of a certain majorant equation, and also of the initial one for a some fixed admissible control.

Key words: functional operator equation of the Hammerstein type; total preservation of global solvability; majorant equation; Volterra property.

Чернов Андрей Владимирович, Нижегородский государственный университет, Нижегородский государственный технический университет, г. Нижний Новогород, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и оптимального управления (ННГУ), доцент кафедры «Прикладная математика» (НГТУ), e-mail: chavnn@mail.ru

Chernov Andrey Vladimirovich, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Physics and Optimal Control Department, e-mail: chavnn@mail.ru

УДК 517.929

ТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© К.М. Чудинов

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; запаздывание; устойчивость; эффективные условия; точные условия.

Получены неулучшаемые достаточные условия устойчивости линейных скалярных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и неотрицательным коэффициентом, имеющие вид интегральной оценки коэффициента на отрезках определенной длины.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a(t)x\big(t - r(t)\big) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

для которого ниже везде полагаем $a(t) \geqslant 0$ и $r(t) \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$.

В середине XX века А.Д. Мышкис получил классический результат [1]: все решения уравнения (1) являются устойчивыми по Ляпунову, если $\sup_{t\geqslant 0} a(t) \sup_{t\geqslant 0} r(t) \leqslant 3/2$, и асимптотически устойчивыми, если $\inf_{t\geqslant 0} a(t) > 0$ и $\sup_{t\geqslant 0} a(t) \sup_{t\geqslant 0} r(t) < 3/2$. Здесь константа $3/2$ является *точной*: утверждения об устойчивости станут неверными, если увеличить в неравенствах $3/2$ на произвольное $\varepsilon > 0$.

Результат Мышкиса стал первым в череде эффективных условий устойчивости неавтономных функционально-дифференциальных уравнений, выражаемых в явном виде через ограничения на параметры уравнения, для уравнения (1) — на функции a и r.

Среди результатов такого рода известен следующий [2]: если $r(t) \equiv \omega$, $a(t) \equiv a(t + 2\omega)$, то уравнение (1) асимптотически устойчиво при условии $0 < \int_0^{2\omega} a(t)\,dt < 2$. Нетрудно показать, что константа 2 в правой части неравенства является точной в указанном выше смысле. Обратим внимание, что длиной промежутка интегрирования является удвоенная величина запаздывания.

Недавно [3] было обнаружено, что последний результат является сужением на периодические уравнения условия устойчивости произвольных уравнений вида (1). В данной работе устанавливаются более точные соотношения между устойчивостью уравнения (1) и величиной $\int_{t-\Omega}^{t} a(s)\,ds$, где $\Omega \geqslant 2\omega = 2\sup_{t\geqslant 0} r(t)$.

Определим явно основные используемые далее предположения.