УДК 517.988.6

О НЕСТАНДАРТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

© Б.Д. Гельман

Ключевые слова: замкнутый сюръективный оператор; многозначное сжимающее отображение; дифференциальное уравнение.

Настоящая работа посвящена исследованию нестандартных краевых задач. В ней строятся включения с сюръективными операторами эквивалентные этим задачам и изучается разрешимость этих включений. В работе рассматриваются задачи у которых правая часть уравнения является липшицевой. В статье также содержатся примеры применения доказанных теорем к изучению нестандартных краевых задач.

Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, $A : E_1 \to E_2$, $L : E_1 \to E_3$ линейные сюръективные операторы. В теории краевых задач часто возникает следующая система:

$$A(x) = f(x), \tag{1}$$

$$L(x) = u_0, \tag{2}$$

где $f : E_1 \to E_2$ непрерывное отображение, а $u_0 \in E_3$ некоторый фиксированный элемент. Очевидно, что изучение этой системы может быть сведено к изучению операторного уравнения $M(x) = g(x)$, где оператор $M = A \times L$, а отображение $g(x) = (f(x), u_0)$. В стандартных краевых задачах оператор M является изоморфизмом однако представляет интерес случай, когда этот оператор не является изоморфизмом. В этом случае эта система сводится к изучению операторного уравнения с сюръективным оператором. В настоящей работе предлагается новый подход к исследованию этой системы.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $B : D(B) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Рассмотрим многозначное обратное отображение B^{-1}. Число

$$||B^{-1}|| = \sup_{y \in E_2, y \neq 0} \left\{ \frac{\inf\{||x|| \mid x \in E_1,\ B(x) = y\}}{||y||} \right\}$$

называется нормой многозначного отображения B^{-1}.

При изучении разрешимости уравнений с сюръективными операторами эта норма играет важную роль, чем эта норма меньше, тем шире поле применимости доказанной теоремы. В работе [1] приведены примеры вычисления $||B^{-1}||$.

Пусть E_1, E_2, E_3 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Пусть $L : D(L) \subset E_1 \to E_3$ — замкнутый линейный оператор подчиненный оператору A, т.е. $D(A) \subset D(L)$. Пусть оператор $M = A \times L : D(A) \subset E_1 \to \to E_2 \times E_2$, обозначим через $Y = Ker(L)$. Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 1. *Если M является сюръективным оператором, то для любой точки $y \in E_2$ найдется точка $x \in D(A) \bigcap Y$ такая, что $A(x) = y$.*

Обозначим через T сужение оператора A на подпространство Y.

Л е м м а 2. *Если M является сюръективным оператором, то T также является замкнутым сюръективным оператором.*

Пусть $\mathbb{L}$ сужение оператора L на подпространство $Ker(A)$, тогда несложно заметить, что $\mathbb{L}$ является сюръективным оператором. Заметим также, что в силу определения оператора T справедливо следующее равенство: $Ker(T) = Ker(A) \bigcap Y = Ker(\mathbb{L})$.

Сравнивая $||M^{-1}||$ и $||T^{-1}||$ нетрудно заметить, что $||T^{-1}|| \leqslant ||M^{-1}||$. Нетрудно также привести примеры в которых $||T^{-1}|| < ||M^{-1}||$.

Справедлива следующая оценка $||T^{-1}||$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть оператор M является сюръективным. Если оператор L непрерывен, то* $||T^{-1}|| \leqslant ||A^{-1}||\big(1 + ||\mathbb{L}^{-1}||\,||L||\big)$.

Будем предполагать, что оператор $M = A \times L$ является сюръективным, а $f : E_1 \to$ $\to E_2$ — липшицево отображение с константой Липшица β. Рассмотрим задачу (1), (2).

Имеет место следующее утверждение.

Л е м м а 3. *Точка $x_* \in E_1$ является решением задачи (1), (2), тогда и только тогда, когда она является решением следующего включения:*

$$x \in T^{-1}(f(x)) + a, \tag{3}$$

где a — произвольная точка из $\mathbb{L}^{-1}(u_0)$.

Опираясь на включение (3) и используя принцип многозначных сжимающих отображений (см., например, [2]), можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Если* $\beta\,||T^{-1}|| < 1$, *то множество решений задачи (1), (2) непусто.*

Применим теорему 1 к изучению следующей нестандартной краевой задачи.

П р и м е р. Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, норма $||x|| = |x_1| + |x_2|$, отображение $f : [0,1] \times$ $\times\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ непрерывно и липшицево по второму аргументу с константой Липшица c. Рассмотрим следующую задачу:

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{4}$$

$$\int_0^1 (x_1(t) + x_2(t))\,dt = u_0, \tag{5}$$

где u_0 — произвольное фиксированное число.

Нетрудно заметить, что эта задача является нестандартной краевой задачей и к ней применима теорема 1. Очевидно также, что оператор $\mathbb{L} : R^2 \to R^1$, $\mathbb{L}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Чтобы вычислить $||\mathbb{L}^{-1}||$ решим следующую задачу:

$$\min\{|x_1| + |x_2| \mid x_1 + x_2 = u,\, u \in R\}.$$

Нетрудно заметить, что $\min\{|x_1| + |x_2| \mid x_1 + x_2 = u\} = |u|,$ т.е. $||\mathbb{L}^{-1}|| = 1.$ Тогда в силу теоремы 1 и предложения 1 получаем, что если константа Липшица $c < 1$, то множество решений задачи (4), (5) непусто.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельман Б.Д.* Многозначные сжимающие отображения и их приложения // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж, 2009. Вып. 1. С. 74-86.

2. *Nadler S.B.* Multi-valued contraction mappings // Pasif. J. Math. 1969. V. 30. № 2. P. 475-488.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-00468-а.

Поступила в редакцию 15 мая 2015 г.

Gel'man B.D. ABOUT NON-STANDARD BOUNDARY VALUE PROBLEMS

The present work is devoted to the study of one class of non-standard boundary value problems. Inclusions with surjective operators are constructed in it that are equivalent to these problems, and solvability of these inclusions is investigated. The article also contains examples of applications of our theorems to the study of non-standard boundary value problems.

Key words: closed surjective operator; multi-valued contraction mapping; differential equations.

Гельман Борис Данилович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и геометрии, e-mail: gelman@math.vsu.ru

Gel'man Boris Danilovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Theory of Functions and Geometry Department, e-mail: gelman@math.vsu.ru

УДК 519.711

МЕТОД РАЗРЫВНОЙ ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

© Е.В. Гончарова, М.В. Старицын

Ключевые слова: гибридные системы; оптимальное управление; импульсное управление; полиномиальные импульсы; смешанные ограничения, разрывная замена времени.
Ставится задача оптимального управления динамической системой с траекториями ограниченной вариации, подчиненной двум типам управляющих воздействий: в динамике участвуют обычное «рассеянное» (измеримое ограниченное) управление и импульсное управление типа борелевской меры, реализующее эффект «полиномиальных импульсов». Модель описывается специального вида дифференциальным уравнением с мерами при ограничениях на односторонние пределы траектории в точках и на интервалах, где сосредоточено импульсное управление (т. н. нестандартные смешанные ограничения [1]). Предложен метод эквивалентного преобразования поставленной задачи к классической вариационной проблеме с абсолютно непрерывными траекториями, что открывает возможности исследования и решения регулярными аналитическими и численными методами.

Настоящая заметка посвящена развитию математического аппарата теории импульсного управления применительно к популярным сегодня моделям «гибридных динамических систем» [2], характеризующимся наличием нескольких вариантов управляемой динамики, переключение между которыми обусловлено текущим фазовым состоянием. Наша цель — распространение метода разрывной замены времени [3] на модели такого типа.

Рассмотрим задачу (P) оптимального управления дифференциальным уравнением с мерами:

$$I = F(x(T)) \to \inf,$$

$$dx = f_0(x,u)dt + \sum_{q\in Q\setminus\{p\}} f_q(x,u)\, l^q\, dt + f_p(x,u)\,\vartheta(dt), \quad x(0-) = x_0, \tag{1}$$

$$x(t-) \in \mathcal{Z}_-, \quad x(t) \in \mathcal{Z}_+ \quad |\vartheta|\text{-п.в. } t \in [0,T], \tag{2}$$

$$|\vartheta|([0,T]) \leqslant M. \tag{3}$$

В качестве входных данных модели задан следующий набор параметров:

- $T, M > 0$;