УДК 517 (075.8)

ОБ ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

© В.И. Фомин

Ключевые слова: иррациональное число; рациональное число; простое число; нижний класс сечения; верхний класс сечения.

Методом Дедекинда построены два бесконечных множества иррациональных чисел.

ВВЕДЕНИЕ

При определении иррациональных чисел по Дедекинду во многих учебниках [1, с. 35; 2, с. 18, 79] приводится единственный пример конкретного сечения в области рациональных чисел, порождающего иррациональное число (сечение, определяющее число $\sqrt{2}$), и у студентов формируется ложное представление о том, что иррациональные числа – это некие экзотические объекты и их не так много. Ниже приводится пример сечения в области рациональных чисел, определяющего иррациональное число, позволяющий увидеть, что множество иррациональных чисел бесконечно, т. е. что «иррациональных чисел не меньше, чем рациональных чисел». Этой информации о количестве иррациональных чисел вполне достаточно при изложении темы «Иррациональные числа» по учебному плану, не содержащему теорему о том, что множество иррациональных чисел имеет мощность континуума [3, с. 17, 22].

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Пусть $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, $M=\{r\in\mathbb{Q}\,|\,0<r<1\}$.

Возьмем $r\in M$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$. Положим

$$A=\{a\in\mathbb{Q}\,|\,a\leq 0\}\cup\{a\in\mathbb{Q}\,|\,a>0, a^n<1-r^n\},$$
$$B=\{b\in\mathbb{Q}\,|\,b>0,\ b^n>1-r^n\}.$$

Заметим, что $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$ и $A\cup B=\mathbb{Q}$, ибо не существует $s\in\mathbb{Q}\,|\,s^n=1-r^n$ [4–5]. Кроме того, $A\cap B=\varnothing$ и для $\forall a\in A,\ \forall b\in B \Rightarrow a<b.$ Следовательно, $A\,|\,B$ – сечение в области рациональных чисел.

В нижнем классе A нет наибольшего числа. Действительно, пусть $a\in A$. Покажем, что $\exists a_1\in A\,|\,a_1>a$. Если $a\leq 0$, то в качестве a_1 можно взять любое $a>0\,|\,a^n<1-r^n$. Пусть $a\in A$ и $a>0$, следовательно, $1-r^n-a^n>0$. Покажем, что при достаточно большом $m\in\mathbb{N}$ число $a_1=a+\frac{1}{m}\in A$, т. е.

$$\left(a+\frac{1}{m}\right)^n<1-r^n \tag{1}$$

(заметим, что $a_1>a$). По биному Ньютона

$$\left(a+\frac{1}{m}\right)^n=a^n+\sum_{k=1}^{n}C_n^k a^{n-k}\left(\frac{1}{m}\right)^k.$$

Заметим, что $(1/m)^k\leq 1/m$, $1\leq k\leq n$, следовательно,

$$\left(a+\frac{1}{m}\right)^n\leq a^n+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}C_n^k a^{n-k}$$

и для выполнения (1) достаточно, чтобы

$$a^n+\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}C_n^k a^{n-k}<1-r^n,$$

для чего достаточно взять

$$m>\left(\sum_{k=1}^{n}C_n^k a^{n-k}\right)\Big/\left(1-r^n-a^n\right).$$

В верхнем классе B нет наименьшего числа. Действительно, пусть $b\in B$, следовательно, $b^n-1+r^n>0$. Покажем, что при достаточно большом $m\in\mathbb{N}$ число $b_1=b-\frac{1}{m}\in B$, т. е.

$$\left(b-\frac{1}{m}\right)^n>1-r^n \tag{2}$$

(заметим, что $b_1<b$). По биному Ньютона

$$\left(b-\frac{1}{m}\right)^n=b^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k b^{n-k}\left(\frac{1}{m}\right)^k.$$

Неравенство (2) принимает вид

$$b^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k b^{n-k}\left(\frac{1}{m}\right)^k > 1 - r^n$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} C_n^k b^{n-k}\left(\frac{1}{m}\right)^k < b^n - 1 + r^n . \qquad (3)$$

Отбрасывая в левой части неравенства (3) все слагаемые со знаком «–» и заменяя во всех оставшихся слагаемых выражение $(1/m)^k$ на $1/m$, приходим к оценке вида

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} C_n^k b^{n-k}\left(\frac{1}{m}\right)^k < \frac{A}{m},$$

где $A > 0$. Тогда для выполнения (3) достаточно, чтобы $(A/m) < b^n - 1 + r^n$, т. е. достаточно взять

$$m > \frac{A}{b^n - 1 + r^n}.$$

Итак, в нижнем классе *A* нет наибольшего числа, а в верхнем классе *B* нет наименьшего числа. Следовательно, построенное сечение $A\,|\,B$ определяет иррациональное число. Обозначим его через $\alpha_{r,n} = \sqrt[n]{1-r^n}$. Множество $S = \bigcup_{n=3}^{\infty} M_n$, где $M_n = \left\{ \alpha_{r,n} = \sqrt[n]{1-r^n} \mid r \in M \right\}$, представляет собой счетное множество иррациональных чисел как объединение счетного множества счетных множеств (при каждом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ множество M_n счетно в силу счетности множества M).

Можно привести более простой пример счетного множества иррациональных чисел. Рассмотрим множество простых чисел

$$L = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}.$$

Замечание 1. Для простого числа l не существует рационального числа, квадрат которого равен l.

Пусть $l \in L$, l фиксировано. Положим

$$A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq 0\} \cup \left\{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0,\ a^2 < l \right\},$$
$$B = \left\{b \in \mathbb{Q} \mid b > 0,\ b^2 > l\right\}.$$

Заметим, что $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ и в силу замечания 1 $A \cup B = \mathbb{Q}$. Кроме того, $A \cap B = \varnothing$ и для $\forall a \in A$, $\forall b \in B \Rightarrow a < b$. Следовательно, $A\,|\,B$ – сечение в области рациональных чисел. В нижнем классе *A* нет наибольшего числа, в верхнем классе *B* нет наименьшего числа (это показывается точно так же, как было сделано выше при построении иррационального числа $\alpha_{r,n} = \sqrt[n]{1-r^n}$). Следовательно, построенное сечение $A\,|\,B$ определяет иррациональное число. Обозначим его через $\alpha_l = \sqrt{l}$. Таким образом, для каждого простого числа l можно построить иррациональное число $\alpha = \sqrt{l}$, при этом, если $l_1, l_2 \in L$, $l_1 \neq l_2$, то $\sqrt{l_1} \neq \sqrt{l_2}$, ибо сечения, определяющие числа $\sqrt{l_1}$, $\sqrt{l_2}$, не совпадают. Множество $H = \left\{\alpha_l = \sqrt{l} \mid l \in L\right\}$ есть счетное множество иррациональных чисел, ибо множество $L \subset \mathbb{N}$ бесконечно [6, с. 18, 79], а всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно [3].

Чтобы у студентов не создавалось представления о том, что иррациональные числа порождаются лишь радикалами, желательно в процессе обучения математике приводить примеры иррациональных чисел иной природы. Например, после обоснования второго замечательного предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

уместно доказать [7, с. 155], что число e иррационально, опираясь на тот факт, что

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

[2]. Заметим, что использование суммы ряда в первом учебном семестре вполне корректно, ибо понятия числового ряда (в частности, знакоположительного ряда) и его суммы можно ввести после доказательства теоремы о существовании конечного предела у возрастающей ограниченной сверху последовательности, что позволит сразу же указать одно из применений этой теоремы: установить признак сходимости знакоположительных рядов.

Несмотря на то, что множество иррациональных чисел несчетно, а множество рациональных чисел счетно, т. е. что основную массу вещественных чисел представляют иррациональные числа, отсутствует общепринятое обозначение множества иррациональных чисел, хотя наличие такого обозначения существенно сокращало бы записи рассуждений, в которых для вещественных чисел приходится рассматривать отдельно два случая: когда вещественные числа являются рациональными и когда вещественные числа являются иррациональными. Для других базовых множеств вещественных чисел такие обозначения имеются: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел (natural – натуральный); $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел; $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел (quotient – отношение). Учитывая англ. irrational – иррациональное, естественно использовать для обозначения множества иррациональных чисел символ I, но этот символ уже занят под другие общепринятые обозначения (I – единичный оператор (identity operator), I – интеграл (integral) и т. д.). Вопрос об общепринятом обозначении множества иррациональных чисел остается открытым. В качестве одного из вариантов такого обозначения можно предложить букву Υ (ипсилон) греческого алфавита, ибо 1) иррациональные числа – это принципиально новые математические объекты по сравнению с рациональными числами, и для обозначения множества таких объектов можно использовать букву другого алфавита; 2) первая буква в названии Υ совпадает с первой буквой в слове «иррациональное»; 3) символ Υ не задействован в других общепринятых обозначениях. В итоге получаем краткую информативную запись множества вещественных чисел: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \Upsilon$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построение конкретных бесконечных подмножеств множества иррациональных чисел методом Дедекинда способствует лучшему пониманию учащимися необходимости расширения поля рациональных чисел до поля действительных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977. 368 с.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. М., 1970. Т. 1. 616 с.
3. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М., 1974. 480 с.
4. *Wiles A.* Modular elliptic curves and Fermat's last Theorem // Annals of Mathematics. 1995. V. 142. P. 443-551.
5. *Wiles A.* Ring theoretic of certain Hecke algebras // Annals of Mathematics. 1995. V. 142. P. 553-572.
6. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. М., 1972.
7. *Сизый С.В.* Лекции по теории чисел. М., 2007. 191 с.

Поступила в редакцию 27 февраля 2015 г.

Fomin V.I. ABOUT ONE SET OF IRRATIONAL NUMBERS

Two infinite sets of irrational numbers are built by Dedekind method.

Key words: irrational number; rational number; prime number; lower class of section; upper class of section.

Фомин Василий Ильич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и механики, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru

Fomin Vasiliy Ilyich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Applied Mathematics and Mechanics Department, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru