УДК 517.929

О РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© В.В. Малыгина

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; робастная устойчивость; эффективные признаки.

Для линейного неавтономного дифференциального уравнения с несколькими запаздываниями получен эффективный признак робастной устойчивости. В качестве примера рассмотрено уравнение с двумя запаздываниями, для которого построена область робастной устойчивости в пространстве параметров исходной задачи.

1. Робастная устойчивость для функционально-дифференциальных уравнений. Одно из противоречий, которое приходится преодолевать при адаптации математической модели к приложениям — это невозможность точного задания параметров модели. Как правило, параметры задаются «интервальными оценками»: известно, что параметр принадлежит заданному интервалу, и ответ следует дать в терминах границ этих интервалов. При исследовании устойчивости дифференциальных (в частности, функционально-дифференциальных) уравнений вопросы такого рода характеризуются специальным термином «робастная устойчивость» (от англ. robust — крепкий, грубый).

Отметим, что задача робастной устойчивости содержательна уже для автономных функционально-дифференциальных уравнений [1, 2], т. к. постоянство коэффициентов и запаздываний еще не означает, что они точно заданы. В ситуации, когда рассматриваемый объект — неавтономный, задача робастной устойчивости, сохраняя свою актуальность, становится значительно сложнее.

Первый результат, который можно классифицировать как признак робастной устойчивости для неавтономных функционально-дифференциальных уравнений — знаменитая «3/2-теорема» А.Д. Мышкиса.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с одним переменным запаздыванием

$$\dot{x}(t) + a(t)x\big(t - r(t)\big) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

Т е о р е м а 1 (А.Д. Мышкис, 1951, [3]). *Пусть* $0 \leqslant r(t) \leqslant r$, $m \leqslant a(t) \leqslant M$.

- *Если* $m > 0$, $Mr < 3/2$, *то уравнение* (1) *асимптотически устойчиво.*
- *Если* $m \geqslant 0$, $Mr \leqslant 3/2$, *то уравнение* (1) *устойчиво по Ляпунову.*

Постоянная $3/2$ в теореме Мышкиса является точной: построенные в той же работе [3] примеры показывают, что ее нельзя увеличить ни на какую, сколь угодно малую величину.

Теорема 1 в дальнейшем многократно переоткрывалась и уточнялась (см.[4–6]); в частности, было замечено, что в условиях первой части теоремы уравнение (1) является экспоненциально устойчивым, а в условиях второй части — равномерно устойчивым.

Обращает на себя внимание то, что в теореме 1 роль границ интервалов, задающих параметры уравнения (1), существенно различна. Значения постоянных M и r определяют величину области устойчивости, и чем точнее они заданы, тем больше область в пространстве параметров, попадание в которую гарантирует устойчивость уравнения (1). Напротив, величина границы m не существенна: в первой части теоремы важна отделенность коэффициента a от нуля, во второй части требуется лишь его неотрицательность. Более того, если рассмотреть частный случай уравнения (1), положив $m = M$, то постоянная $3/2$ попрежнему останется точной границей области устойчивости. Повысить ее удается, только если сделать постоянным также и запаздывание: при $r(t) = r > 0$ область экспоненциальной устойчивости увеличится до интервала вида $0 < Mr < \pi/2$, а область равномерной устойчивости — до отрезка $0 \leqslant Mr \leqslant \pi/2$.

Причины такого явления, по-видимому, объясняются спецификой уравнений с последействием: наличие запаздывающего аргумента изначально делает ситуацию «несимметричной».

2. Обобщение на случай нескольких запаздываний. Рассмотрим скалярное функционально-дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=0}^{N} a_k(t) x\big(t - r_k(t)\big) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где функции a_k локально суммируемы, функции r_k измеримы. Решение уравнения (1) принято считать [7, с. 9] принадлежащим классу абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке функций. При отрицательных значениях аргумента полагаем решение доопределенным некоторой начальной функцией.

Пусть параметры уравнения (2) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ подчинены неравенствам: $a_k \leqslant a_k(t) \leqslant A_k$, $0 \leqslant r_k(t) \leqslant r_k$, где a_k, A_k, r_k — заданные положительные постоянные. Поставим задачу найти условия устойчивости уравнения (2) в терминах этих констант.

Поставим в соответствие уравнению (2) так называемое *test-уравнение:*

$$\dot{y}(t) + \sum_{k=0}^{N} p_k(t) y(t - r_k) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

При любых $\xi \leqslant 0$ полагаем $y(\xi) = 1$, функции p_k определяем по следующему правилу: $p_k(t) = A_k$, если $t \leqslant r_k + t_0$ и $p_k(t) = a_k$, если $t > r_k + t_0$, где t_0 – первый нуль решения test-уравнения. Случай $t_0 = \infty$ не исключается.

Т е о р е м а 2. *Пусть l — первый минимум решения test-уравнения.*

- *Если $y(l) > -1$, то уравнение (2) экспоненциально устойчиво.*
- *Если $y(l) \geqslant -1$, то уравнение (2) равномерно устойчиво.*

3. Пример построения области робастной устойчивости. Покажем, как работает теорема 2 применительно к конкретным объектам. Рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) + b(t)x(t - r(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Не нарушая общности можно считать, что $0 \leqslant r(t) \leqslant 1$. Коэффициенты уравнения (4) подчиним неравенствам $0 < a \leqslant a(t) \leqslant A$ и $0 < b \leqslant b(t) \leqslant B$.

Test-уравнение для (4) легко строится «по шагам».

Пусть $t \in [0, 1]$. В малой окрестности нуля решение уравнения (3) имеет вид $y(t) = (1 + B/A)e^{-At} - B/A$, откуда легко определяется его первый нуль: $t_0 = 1/A \ln(1 + A/B)$. Следовательно, на отрезке $[0, t_0]$ вид функции y не меняется. Далее, выстраивая функции p_1 и p_2 в соответствии с определением, находим решение на отрезке $[t_0, 1]$, где оно становится отрицательным, но продолжает монотонно убывать, и, наконец, на отрезке $[1, 1 + t_0]$, где решение достигает первого минимума $t = l$. Первый минимум определяется из уравнения

$$e^{(1-l)} = \left(1 - e^{-a}\frac{A-a}{A+B}\left(1+\frac{A}{B}\right)^{a/A}\right)^{1/A-a}.$$

В соответствии с теоремой 2, кривая $y(l) = -1$ есть граница области устойчивости, которая для уравнения (4) имеет вид:

$$\frac{Bq}{As}\left(1+\frac{A}{B}\right)^{s} e^{-As} - \frac{Bq}{As(1-s)}\left(1+\frac{B}{A}\right) + \frac{Bq^{1/s}}{A(1-s)}\left(1+\frac{B}{A}\right) + \frac{B^2}{A^2 s} = -1, \qquad (5)$$

где $s = a/A$, а $q = \left(1 - e^{-As}\frac{A(1-s)}{A+B}\left(1+\frac{A}{B}\right)^{s}\right)^{s/1-s}$.

На рисунке 1 приведены графики кривых (5) при s, меняющемся от 0 до 1 с шагом $1/10$. При $s = 0$ и $s = 1$ кривые (5) формально не определены, но, как несложно убедиться, имеют пределы при $s \to 0$ и $s \to 1$ и, следовательно, могут быть в этих точках доопределены по непрерывности.

Области устойчивости уравнения (4) — множество точек плоскости, лежащих между осью OA и кривыми (5).

Интересно отметить, что нижняя граница коэффициента b, как и в теореме 1, не входит в формулу для границ области устойчивости, тогда как обе границы коэффициента a оказываются востребованными. Граница, которая получается в результате предельного перехода $s \to 1$, совпадает, как и следовало ожидать, с точной границей устойчивости уравнения (4) в ситуации $a = a(t) = A$, $b = b(t) = B$ (см. [8]).

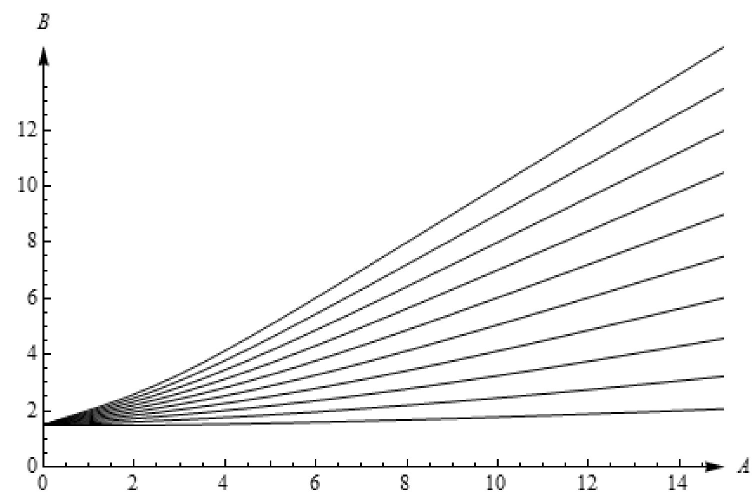

Рис. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харитонов В.Л.* Критерий устойчивости одного семейства квазиполиномов запаздывающего типа // Автоматика и телемеханика. 1991. Вып. 2. С. 73-82.

2. *Харитонов В.Л.* Семейство устойчивых квазиполиномов // Автоматика и телемеханика. 1991. Вып. 7. С. 75-88.

3. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1951.

4. *Yorke J.A.* Asymptotic stability for one-dimensional delay equations // J. Different. Equat. 1970. V. 7. № 1. P. 189-202.

5. *Малыгина В.В.* Некоторые признаки устойчивости функционально-дифференциальных уравнений, разрешённых относительно производной // Изв. вузов. Математика. 1992. № 7. С. 46-53.

6. *Yoneyama T.* The 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations with unbounded delay // J. Math. Anal. and Appl. 1992. № 165. P. 133-143.

7. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

8. *Малыгина В.В.* Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием // Изв. вузов. Математика. 1993. № 5. С. 72-85.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (задание №2014/152, проект №1890) и при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 13-01-96050 р_урал_а).

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.

Malygina V.V. ON THE ROBUST STABILITY OF NONAUTONOMOUS FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Effective conditions of robust stability are obtained for a linear nonautonomous differential equation with several delays. As an example, the equation with two delays is considered, whose domain of robust stability is constructed in the parameter space of the problem.

Key words: functional-differential equation; robust stability; effective conditions.

Малыгина Вера Владимировна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: mavera@list.ru

Malygina Vera Vladimirovna, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher of the Research Center «Functional-Differential Equations», e-mail: mavera@list.ru

УДК 517.977

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ТРУБОК ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С КОНИЧЕСКИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ

© **О.Г. Матвийчук**

Ключевые слова: множества достижимости; импульсное управление; эллипсоидальное исчисление.

В работе рассматриваются задача оценивания множеств достижимости управляемых динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с импульсным управлением и неполной информацией о начальных данных. Предполагается, что импульсные управления в динамической системе находятся в пересечении специального конуса и обобщенного эллипсоида в пространстве функций ограниченной вариации. Целью данной работы является исследование свойств множеств достижимости управляемой системы заданного вида и построение алгоритма внутреннего эллипсоидального оценивания траекторий динамических систем импульсного типа.