

of bioinformatics is discussed.

Key words: hypergraph; embedding; invariant; form.

Селиверстов Александр Владиславович, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: slvstv@iitp.ru

Seliverstov Alexandr Vladislavovich, Institute for Information Transmission Problems of RAS (Kharkovich Institute), Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, e-mail: slvstv@iitp.ru

УДК 517.977

МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ В АБСТРАКТНОЙ ИГРЕ УДЕРЖАНИЯ И ОПЕРАТОРНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ

© Д.А. Серков, А.Г. Ченцов

Ключевые слова: программные итерации; операторная выпуклость.

Статья посвящена исследованию соотношений абстрактной версии метода программных итераций и конструкций, связанных с построением операторно выпуклой оболочки множества посредством предоболочки. Рассматривается игровая задача удержания траекторий абстрактной системы в заданном множестве.

Статья продолжает [1–3] и посвящена исследованию соотношений абстрактной версии метода программных итераций (МПИ) и конструкций [4], связанных с построением операторно выпуклой оболочки множества посредством предоболочки [4, с. 12]. Рассматривается игровая задача удержания траекторий абстрактной системы в заданном множестве.

1. Предполагаются заданными произвольные непустое подмножество (п/м) I вещественной прямой $\mathbb{R}$ а также T_2 –пространство (X, τ) , $X \neq \emptyset$. Здесь I — аналог промежутка управления, а X — фазовое пространство «системы». В множестве X^I всех отображений из I в X выделяем непустое множество $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} \subset X^I$, возможных траекторий упомянутой «системы». Кроме того, задано непустое множество Ω отображений из I в (непустое) множество Y ; элементы Ω играют роль неопределенных факторов процесса. Сама «система» отождествляется с мультифункцией (м/ф) $\mathcal{S}$, действующей из $D \times \Omega$, где $D \triangleq I \times X$, в $\mathbf{C}$ (см. [1, (3.4)]); предполагается, что значениями $\mathcal{S}$ являются непустые п/м $\mathbf{C}$. Если $(t, x) \in D$ и $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{S}((t, x), \omega)$ имеет смысл множества траекторий «системы», возможных при действии ω . Если $t \in I$, то $I_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \leq t\}$ и $\mathbf{I}_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \geq t\}$. Если W — множество, то через $\mathcal{P}(W)$ обозначается семейство всех п/м W (булеан W). Если B — множество, $f: I \mapsto B$ и C — непустое п/м I , то через $(f \mid C)$ обозначаем сужение f на множество C . В терминах множеств I_t , $t \in I$, определяется условие неупреждаемости м/ф из Ω в $\mathbf{C}$, подобное [1, с.162]. Среди таких м/ф выделяем (многозначные) квазистратегии, полагаемые, конечно, непустозначными и подчиненными «системе». В этой связи условимся через $\mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C})$ обозначать множество всех м/ф из Ω в $\mathbf{C}$, которые могут принимать $\emptyset$ в качестве своих значений. Если $z = (t, x) \in D$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_z &\triangleq \{\alpha \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbf{C}) \mid (\forall \omega \in \Omega \forall h \in \alpha(\omega) \exists h' \in \mathcal{S}(z, \omega) : (h \mid \mathbf{I}_t) = (h' \mid \mathbf{I}_t)) \\ &\quad \& (\forall \omega_1 \in \Omega \forall \omega_2 \in \Omega \forall t' \in \mathbf{I}_t ((\omega_1 \mid \mathbf{I}_{t'}) = (\omega_2 \mid \mathbf{I}_{t'})) \Rightarrow \\ &\quad (\{(h \mid \mathbf{I}_{t'}) : h \in \alpha(\omega_1)\} = \{(h \mid \mathbf{I}_{t'}) : h \in \alpha(\omega_2)\})) \& (\alpha(\omega) \neq \emptyset \forall \omega \in \Omega)\} \end{aligned}$$

есть множество всех квазистратегий, отвечающих случаю управления на $\mathbf{I}_t$.

Через $\mathbf{F}$ обозначаем семейство всех п/м D , имеющих замкнутые в (X, τ) сечения, отвечающие «моментам времени» из I . Кроме того, через $\mathfrak{C}$ будем обозначать топологию поточечной сходимости множества $\mathbf{C}$, рассматриваемого как подпространство X^I , а через $\mathbb{F}$ и $\mathfrak{K}$ — семейства всех замкнутых и компактных в $(\mathbf{C}, \mathfrak{C})$ п/м $\mathbf{C}$ соответственно. Наконец, через $\tau \otimes \mathfrak{C}$ обозначаем стандартную топологию произведения ТП (X, τ) и $(\mathbf{C}, \mathfrak{C})$, а через $\mathfrak{F}_{\otimes}$ — семейство всех замкнутых в $(X \times \mathbf{C}, \tau \otimes \mathfrak{C})$ п/м $X \times \mathbf{C}$. В дальнейшем полагаем выполненными следующие условия.

У с л о в и е 1. (Замкнутость образа) $\mathcal{S}(z, \omega) \in \mathbb{F} \quad \forall z \in D \quad \forall \omega \in \Omega$.

У с л о в и е 2. (Замкнутость графика) $\{(x, h) \in X \times \mathbf{C} \mid h \in \mathcal{S}((t, x), \omega)\} \in \mathfrak{F}_{\otimes} \quad \forall t \in I \quad \forall \omega \in \Omega$.

У с л о в и е 3. (Предкомпактность множеств-значений) $\forall t \in I \quad \forall x \in X \quad \forall \omega \in \Omega \quad \exists H \in \mathbf{N}_{\tau}(x) \quad \exists K \in \mathfrak{K} : \mathcal{S}((t, y), \omega) \subset K \quad \forall y \in H$.

У с л о в и е 4. (Аналог полугруппового свойства) $\forall (t, x) \in D, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall h \in \mathcal{S}((t, x), \omega), \quad \forall t' \in \mathbf{I}_t, \quad \exists h' \in \mathcal{S}((t', h(t')), \omega) : (h \mid \mathbf{I}_{t'}) = (h' \mid \mathbf{I}_{t'})$.

2. Следуя [1, с.162] введем при $H \in \mathcal{P}(D)$, $(t, x) \in D$ и $\omega \in \Omega$ множество

$$\Pi(\omega \mid (t, x), H) \triangleq \{s \in \mathcal{S}((t, x), \omega) \mid (t', s(t')) \in H \quad \forall t' \in \mathbf{I}_t\} \quad (1)$$

всех траекторий «системы», разрешающих задачу удержания в H при фиксированной помехе ω . С учетом (1) введем следующее определение оператора $\mathbf{A}$ программного поглощения: полагаем $\mathbf{A} : \mathcal{P}(D) \mapsto \mathcal{P}(D)$ есть такое отображение, что

$$\mathbf{A}(H) \triangleq \{z \in H \mid \Pi(\omega \mid z, H) \neq \emptyset \quad \forall \omega \in \Omega\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(D);$$

в этом случае $\mathbf{A}(F) \in \mathbf{F}$, $\forall F \in \mathbf{F}$. Оператор $\mathbf{A}$ является секвенциально непрерывным в следующем смысле: для произвольных последовательности $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$ и множества $F \in \mathcal{P}(D)$ истинна импликация $((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow ((\mathbf{A}(F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}(F))$. Введем в рассмотрение степени $\mathbf{A}^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, оператора $\mathbf{A}$, полагая, что

$$\mathbf{A}^0(H) \triangleq H \quad \mathbf{A}^k \triangleq \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{k-1} \quad \forall H \in \mathcal{P}(D) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Из определений легко следует

$$\mathbf{A}^k(F) \in \mathbf{F} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall F \in \mathbf{F}. \quad (2)$$

Введем теперь оператор $\overset{\infty}{\mathbf{A}}$, действующий в семействе всех п/м D по правилу

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(M) \triangleq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k(M) \quad \forall M \subset D.$$

П р е д л о ж е н и е 1. Если $F \in \mathbf{F}$, то $\mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)$.

Из предложения 1 и (2) следует, что оператор $\overset{\infty}{\mathbf{A}}$ идемпотентен: $\overset{\infty}{\mathbf{A}} = \overset{\infty}{\mathbf{A}} \circ \overset{\infty}{\mathbf{A}}$.

П р е д л о ж е н и е 2. Если $F \in \mathbf{F}$ и $H \in \mathcal{P}(F)$, то

$$(\mathbf{A}(H) = H) \Rightarrow (H \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)), \quad (\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset H) \Rightarrow (\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(H)).$$

3. Всюду в дальнейшем фиксируем множество $\mathcal{N} \in \mathbf{F}$ (в содержательной задаче удержания траекторий управляемой системы сечения $\mathcal{N}$ используются в качестве фазовых

ограничений). Введем в рассмотрение оператор $\mathcal{A}$, действующий в булеане $\mathcal{N}$ по правилу $\mathcal{A}(H) \triangleq \mathcal{N} \setminus \mathbf{A}(\mathcal{N} \setminus H)$. В связи с $\mathcal{A}$ рассмотрим, следуя [2] семейство

$$(\mathcal{A}\text{-conv})[\mathcal{N}] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathcal{N}) \mid \forall B \in \mathcal{P}(\mathcal{N}) (B \subset H) \Rightarrow (\mathcal{A}(B) \subset H)\},$$

получая соответствующую операторную выпуклость. Оператор $\mathcal{A}$ является предоболочкой [4], причем $(\mathcal{A}\text{-conv})[\mathcal{N}] = \{H \in \mathcal{P}(\mathcal{N}) \mid \mathcal{A}(H) = H\}$.

Предложение 3. $\mathcal{N} \setminus \mathbf{A}^\infty(\mathcal{N}) \in (\mathcal{A}\text{-conv})[\mathcal{N}]$.

Теорема 1. Множество $\mathcal{N} \setminus \mathbf{A}^\infty(\mathcal{N})$ есть операторно выпуклая оболочка $\emptyset$.

Следствие 1. $\mathcal{N} \setminus \mathbf{A}^\infty(\mathcal{N})$ есть наименьший по включению элемент выпуклости $(\mathcal{A}\text{-conv})[\mathcal{N}]$.

4. Рассмотрим теперь вопрос о решении задачи удержания в классе многозначных квази-стратегий, имея в виду конструкции [1]. Для $h \in \mathbf{C}$, $h' \in \mathbf{C}$ и $t \in I$ отображение $(h \square h')_t : I \mapsto X$ определяется условиями: $((h \square h')_t(\xi) \triangleq h(\xi) \forall \xi \in I_t) \& ((h \square h')_t(\zeta) \triangleq h'(\zeta) \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\})$.

Предложение 4. Если $(t, x) \in \mathbf{A}^\infty(\mathcal{N})$, то $\Pi(\cdot \mid (t, x), \mathbf{A}^\infty(\mathcal{N})) \in \mathbb{M}_{(t, x)}$.

При $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ и $t \in I$ отображение $(\omega \square \omega')^t : I \mapsto Y$ определим как: $((\omega \square \omega')^t(\xi) \triangleq \omega(\xi) \forall \xi \in I_t) \& ((\omega \square \omega')^t(\zeta) \triangleq \omega'(\zeta) \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\})$ и предположим выполненными следующие условия.

Условие 5. $\forall t \in I, \forall \omega \in \Omega$ и $\forall \omega' \in \Omega : (\omega \square \omega')^t \in \Omega$.

Условие 6. $\forall z = (t, x) \in D, \forall \xi \in \mathbf{I}_t, \forall \omega \in \Omega, \forall \omega' \in \Omega :$

$$((\omega \mid I_\xi) = (\omega' \mid I_\xi)) \Rightarrow (\forall h \in \mathcal{S}(z, \omega) \forall h' \in \mathcal{S}((\xi, h(\xi)), \omega') (h \square h')_\xi \in \mathcal{S}(z, \omega')).$$

Условие 7. $\forall z = (t, x) \in D, \forall \xi \in \mathbf{I}_t, \forall \omega \in \Omega, \forall \omega' \in \Omega, \forall h \in \mathcal{S}(z, (\omega \square \omega')^\xi), \exists h' \in \mathcal{S}((\xi, h(\xi)), \omega') : (h \mid \mathbf{I}_\xi) = (h' \mid \mathbf{I}_\xi)$.

Легко видеть, что из условий 5, 7 следует условие 4.

Теорема 2. $\mathbf{A}^\infty(\mathcal{N}) = \{(t, x) \in \mathcal{N} \mid \exists \alpha \in \mathbb{M}_{(t, x)} : (\xi, s(\xi)) \in \mathcal{N} \forall \xi \in \mathbf{I}_t \forall \omega \in \Omega \forall s \in \alpha(\omega)\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ченцов А.Г. Метод программных итераций для решения абстрактной задачи удержания // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 157–169.
2. Ченцов А.Г. О задаче управления с ограниченным числом переключений: депонированная рукопись: 4942-В 87. Свердловск: Уральский политехнический институт им. С.М.Кирова, 1987.
3. Ченцов А.Г. К вопросу о соотношении различных версий метода программных итераций: позиционный вариант // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 3. С. 130–149.
4. Солтан В.П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости / под ред. В.И. Арнаутов. Кишинев: Штиинца, 1984. с. 224.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами РФФИ № 15-0107909, № 13-01-00304.

Поступила в редакцию 9 апреля 2015 г.

Serkov D.A., Chentsov A.G. PROGRAMMED ITERATION METHOD IN ABSTRACT GAME OF RETENTION AND OPERATOR CONVEXITY

The article investigates the relations of abstract versions of the programmed iterations method and structures associated with the construction of the convex hull through prehull operator. We consider the game problem of retention of trajectories of an abstract system in a given set.

Key words: programming iterations; operator convexity.

Ченцов Александр Георгиевич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksandr Georgievich, Institute for Mathematics and Mechanics named after N.N. Krasovskii of UB RAS, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of RAS, chief researcher, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Серков Дмитрий Александрович, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: serkov@imm.uran.ru

Serkov Dmitrii Aleksandrovich, Institute for Mathematics and Mechanics named after N.N. Krasovskii of UB RAS, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, e-mail: serkov@imm.uran.ru

УДК 519.977

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГИБРИДНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© П.М. Симонов

Ключевые слова: гибридная система функционально-дифференциальных уравнений; разрешимость в парах пространств; метод модельных уравнений.

Рассматривается абстрактная гибридная система функционально-дифференциальных уравнений. Применен $\mathcal{W}$ -метод. Получены условия её разрешимости в парах пространств. Рассмотрены простые примеры двух уравнений. Задача сводится к уравнению от одной неизвестной.

Введение

Исследованию по устойчивости решений линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) к настоящему времени посвящено крайне мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений линейных стационарных ЛГФДСП. Для систем вида

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t),$$

$$x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t-h),$$

$$x_1(0) = x_{10} \in \mathbb{R}^k, \quad x_2(\tau) = \psi(\tau), \tau \in [-h, 0),$$

$A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$, $\psi : [-h, 0) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ — кусочно-непрерывная вектор-функция, получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости.