ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г.* Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 24-30.

2. *Шарафутдинов И.В.* Бифуркация Андронова-Хопфа в системах с негладкими нелинейностями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 4. С. 835-837.

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Sharafutdinov I.V. PROPERTIES OF PERIODIC OSCILLATIONS OF NON-SMOOTH DYNAMICAL SYSTEMS UNDER MULTIPLE DEGENERATION

The methods of determining the type of bifurcation and stability of steady vibrational modes of dynamic systems with non-smooth right-hand side which has, under a certain value of the parameter, a few pairs of pure imaginary eigenvalues are considered.

Key words: Hopf bifurcation; non-smooth system; multiple degeneration; periodic solution; stability.

Шарафутдинов Ильдар Вакильевич, Башкирский государственный университет (Стерлитамакский филиал), г. Стерлитамак, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и методики обучения математике, e-mail: sh_ildar_79@mail.ru

Sharafutdinov Ildar Vakilievich, Bashkir State University (Sterlitamak Branch), Sterlitamak, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Algebra, Geometry and Teaching Mathematics Department, e-mail: sh_ildar_79@mail.ru

УДК 517.927

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ФОРМАХ ПРОГИБА ПЛАСТИНЫ ПРИ ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

© **Г.Г. Шарафутдинова**

Ключевые слова: прогиб пластины; продольная нагрузка; точка бифуркации.

В работе приведено решение задачи о формах прогиба продольно нагруженной пластины методами теории локальных бифуркаций. Для этого предлагается переход от дифференциальных уравнений к эквивалентному операторному уравнению.

Пусть $\Omega = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$ — прямоугольная замкнутая область на плоскости $\mathbb{R}^2$, W_2^2 — пространство Соболева, $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ — подпространство пространства W_2^2, полученное замыканием множества всех бесконечно дифференцируемых функций с носителями в Ω. Определим функцию $F(x,y) = v(x,y) + N_y \cdot \dfrac{x^2}{2}$, где v — функция напряжений (функция Эйри) в срединной плоскости пластины, параметр N_y характеризует продольную сжимающую силу, приложенную к краям пластины вдоль оси OY.

Дифференциальные уравнения, описывающие прогиб w продольно нагруженной прямоугольной пластины длины a и ширины b имеют вид

$$L_1 \equiv d \cdot \Delta^2 w - h \cdot L(w,F) + hN_y L(w,c) = 0, \tag{1}$$

$$L_2 \equiv \Delta^2 F + \frac{1}{2} E \cdot L(w,w) = 0; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\text{при} \ \ x = 0, a \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \ , \ \ \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \ , \ \ w = 0 \ , \ \ w_{xx} = 0; \\ &\text{при} \ \ y = 0, b \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \ , \ \ \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \ , \ \ w = 0 \ , \ \ w_{yy} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

где Δ — оператор Лапласа, операторы $L(w,F)$ и $L(w,w)$ определяются равенством

$$L(w,F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \ ,$$

d, h, E — известные положительные постоянные (d — жёсткость на изгиб, h — толщина пластины, E — модуль упругости), функция $c = c(x,y) = \dfrac{x^2}{2}$.

Рассматривается задача о бифуркационном поведении пластины при изменении параметра N_y. Предлагается схема, позволяющая определить критические значения этого параметра и получить приближённые формулы для функции прогиба методами теории локальных бифуркаций [1].

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$d \cdot \Delta^2 w = -N_y h \cdot L(w,c), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\text{при} \ \ x = 0, a \quad \ w = w_{xx} = 0; \\ &\text{при} \ \ y = 0, b \quad \ w = w_{yy} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Будем говорить, что λ_0 является точкой бифуркации задачи (1)–(3), если при $N_y = \lambda_0$ линейная задача имеет ненулевое решение.

Решение задачи (4)–(5) можно представить в виде $w(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} B_{km} \sin \dfrac{\pi k x}{a} \sin \dfrac{\pi m y}{b}$.

Тогда критические значения силы N_y определяются из уравнений $\dfrac{h m^2 N_y}{\pi^2 b^2 d} = \left[\dfrac{k^2}{a^2} + \dfrac{m^2}{b^2} \right]^2$; причем каждой паре k и m соответствует некоторая точка бифуркации. Наименьшее значение N_y достигается, когда $k = 1, m = 1$, при этом

$$N_y^* = \frac{\pi^2 d}{h} \cdot \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^4 b^2}.$$

Для изучения вопроса об асимптотических формулах, описывающих нелинейные прогибы задачи (1)–(3) при переходе через критические силы, предлагается следующая схема.

Обозначим через $A_0 : \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \to \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ оператор, ставящий в соответствие функции w решение краевой задачи

$$\Delta^2 F = -\frac{1}{2} E \cdot L(w,w),$$

$$\text{при} \ \ x = 0, a \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \ , \ \ \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \ ;$$

$$\text{при} \ \ y = 0, b \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \ , \ \ \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \ .$$

Рассмотрим определенный на $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ функционал

$$f(w) = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \left(d \cdot (\Delta w)^2 - \frac{h}{2} L(w,w) A_0(w) \right) dx dy.$$

Этот функционал непрерывно дифференцируем по Фреше на $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, и его градиент $\nabla f : \overset{\circ}{W}{}_2^2 \to \overset{\circ}{W}{}_2^2$ определяется (см. [2]) равенством

$$\Big(\nabla f(w), \varphi\Big) = 2\int_0^a\int_0^b \Big(d\cdot\Delta w\Delta\varphi - hL(w, A_0(w))\varphi\Big)dxdy,$$

где $\varphi = \varphi(x,y)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^2$.

Задача отыскания решений системы (1)–(3) эквивалентна [2] задаче отыскания решений уравнения

$$\nabla f(w) = -N_y\nabla g(w), \tag{6}$$

где функционал $g(w)$ определяется равенством $g(w) = h\int_0^a\int_0^b L(w,c)wdxdy$. Обозначим далее через $B : \overset{\circ}{W}{}_2^2 \to \overset{\circ}{W}{}_2^2$ и $D : \overset{\circ}{W}{}_2^2 \to \overset{\circ}{W}{}_2^2$ — операторы, определенные равенствами

$$(Bw,\varphi) = 2\int_0^a\int_0^b d\cdot\Delta w\Delta\varphi dxdy, \quad (Dw,\varphi) = -2h\int_0^a\int_0^b L(w,c)\varphi dxdy.$$

Т е о р е м а 1. *Уравнение* $(B-\lambda D)w = 0$ *при* $\lambda = \lambda_0 = N_y^*$ *имеет ненулевое решение* $w = C\sin\dfrac{\pi x}{a}\sin\dfrac{\pi y}{b}$, *где* C — *произвольная постоянная.*

Уравнение (6) перепишем в виде

$$w = A(\lambda)w + a_3(w)\ , \quad w\in \overset{\circ}{W}{}_2^2, \quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

где $A(\lambda) = I + B - \lambda D$, $a_3(w) = -b(w)$; здесь $b(w)$ — нелинейный оператор, определенный равенством $\big(b(w),\varphi\big) = 2h\int_0^a\int_0^b L\big(w, A_0(w)\big)\varphi\, dxdy$.

Т е о р е м а 2. *Значение* $\lambda_0 = N_y^* = \dfrac{\pi^2 d}{h}\cdot\dfrac{(a^2+b^2)^2}{a^4b^2}$ *является точкой бифуркации уравнения (7).*

Т е о р е м а 3. *Бифурцирующие решения* w_ε *уравнения (7) и соответствующие значения параметра* $\lambda_\varepsilon = \lambda(w_\varepsilon)$ *представимы в виде*

$$w_\varepsilon = \varepsilon e_0 + \varepsilon^3 e_1 + o(\varepsilon^3), \quad \lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_1 + o(\varepsilon^2),$$

где $\varepsilon > 0$ — *малый параметр,* $e_1 = \Gamma_0 a_3(e_0)$, $\lambda_1 = \dfrac{(a_3(e_0), e_0)b^2}{h\pi^2}$, *оператор* $\Gamma_0 : \overset{\circ}{W}{}_2^2 \to \overset{\circ}{W}{}_2^2$ *при любом* $y \in: \overset{\circ}{W}{}_2^2$ *вычисляется по формуле* $\Gamma_0 y = h_0 + h^0$, *где*

$$h_0 = -\frac{(y,e_0)e_0}{\lambda_0(-De_0,e_0)}, \quad h^0 = (I - A(\lambda_0))^{-1}\left[y - \frac{(y,e_0)De_0}{(De_0,e_0)}\right].$$

Непосредственные вычисления показывают, что значение λ_1 представляется в виде дроби, в которой числитель равен

$$\lambda_{11} = 8192\cdot Eab^3\pi^2(\widetilde{\lambda}^4 - 32\pi^4)\times$$
$$\times\left(2(1+\sin\widetilde{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\widetilde{\lambda})\Big(8\pi^4(a^2-b^2)^2 + \widetilde{\lambda}^4(a^4+b^4)\Big) - (16\pi^4+\widetilde{\lambda}^4)(3b^4+3a^4-2a^2b^2)\right),$$

а знаменатель равен

$$\lambda_{12} = \widetilde{\lambda}^4 (a^2+b^2)^4 (16\pi^4 - \widetilde{\lambda}^4)^3 \left[\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \left(\alpha - \frac{2}{\widetilde{\lambda}} \right)^2 \alpha^2 + 2 \left(1 - \frac{\alpha}{\widetilde{\lambda}} \right)^2 \right].$$

Постоянные α и $\widetilde{\lambda}$ определяются из соотношений $\cos\widetilde{\lambda} \cdot \mathrm{ch}\widetilde{\lambda} = 1$, $\alpha = \dfrac{\sin\widetilde{\lambda} - \mathrm{sh}\widetilde{\lambda}}{\cos\widetilde{\lambda} - \mathrm{ch}\widetilde{\lambda}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С.* Функционализация параметра и её приложения в задаче о локальных бифуркациях динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2007. № 4. С. 3-12.

2. *Бобылёв Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К.* Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998. 658 с.

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

Sharafutdinova G.G. METHODS OF THE LOCAL BIFURCATIONS THEORY FOR SOLVING THE PROBLEM OF THE PLATE DEFLECTION FORM UNDER LONGITUDINAL STRENGTH

We give a solution to the problem of the forms of longitudinally loaded deflection plate using the methods of the local bifurcations theory. For this purpose, the transition from differential equations to the equivalent operator equation is proposed.

Key words: deflection plates; longitudinal force; bifurcation point.

Шарафутдинова Гюзель Гафуровна, Башкирский государственный университет (Стерлитамакский филиал), г. Стерлитамак, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теории и методики начального образования, e-mail: guzelbas@mail.ru

Sharafutdinova Gyuzel Gafurovna, Bashkir State University (Sterlitamak Branch), Sterlitamak, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Theory and Methodology of Elementary Education Department, e-mail: guzelbas@mail.ru

УДК 512.8

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ОКРЕСТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ С УЧЕТОМ ПРЕДЫСТОРИИ

© **А.М. Шмырин, Н.М. Мишачев, Д.С. Демахин, А.Г. Кузнецов, Е.С. Аникеев, Е.П. Трофимов**

Ключевые слова: окрестностная модель; синтез; предыстории.

Рассматривается вопрос идентификации окрестностной модели с учетом предыстории.

Линейная окрестностная модель [1, 2] с n узлами имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} (\omega_i^j X_i + t_i^j V_i) + c^j = 0\,, \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

где X_i, V_i — состояние и управление в узле i. Мы рассматриваем задачу идентификации коэффициентов (ω_i^j, t_i^i, c^j) модели на основании уже имеющихся данных (кортежей)